

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
GABRIEL OUIMET

TESTS DE DÉPENDANCE EXTRÊME BASÉS SUR UNE FONCTION  
CARACTÉRISTIQUE EMPIRIQUE DE RANGS

AVRIL 2013

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je souhaite remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce mémoire, que ce soit de près ou de loin. La première personne que je veux remercier est M. Jean-François Quessy, mon directeur de recherche. Il a su me pousser à continuer malgré certains moments plus difficiles. Son aide a été primordiale dans l'élaboration de cet ouvrage et ce, sur plusieurs aspects différents, que ce soit au niveau de l'écoute ou de la disponibilité.

Je veux également remercier ma famille, proche et même un peu plus éloignée, qui m'ont toujours supporté et encouragé dans ma voie, malgré les embûches. Ils ont su me donner l'énergie nécessaire pour porter ce projet à bien.

Finalement, je voudrais remercier le *Conseil National de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie* du Canada, le *Fonds Québécois de Recherche sur la Nature et les Technologies* et l'*Institut des Sciences Mathématiques* du Québec pour leur support financier tout au long de mes recherches et de la rédaction de ce mémoire.

# Table des matières

Remerciements	ii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	vii
Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Fonction caractéristique	4
2.1 Définition . . . . .	4
2.2 Théorème d'inversion . . . . .	7
2.3 Extension multivariée . . . . .	8
2.4 Preuve du Théorème central limite . . . . .	10
Chapitre 3. Méthodes d'inférence basées sur la fonction caractéristique	12
3.1 Fonction caractéristique empirique . . . . .	12
3.2 Tests d'adéquation . . . . .	13
3.2.1 Méthodologie de Epps & Pulley (1983) . . . . .	14
3.2.2 Méthodologie de Matsui & Takemura (2005) . . . . .	15
3.2.3 Méthodologie de Towhidi & Salmanpour (2007) . . . . .	17
3.2.4 Méthodologie de Jiménez-Gamero et al. (2009) . . . . .	18
3.3 Test de Alba Fernández et al. (2008) . . . . .	19

<b>Chapitre 4. Copules &amp; copules à valeurs extrêmes</b>	<b>21</b>
4.1 Lois de probabilité multidimensionnelles . . . . .	21
4.1.1 Densités & fonctions de répartition . . . . .	21
4.1.2 Lois marginales . . . . .	22
4.1.3 Loi normale multidimensionnelle . . . . .	23
4.1.4 Lois de Farlie–Gumbel–Morgenstern . . . . .	23
4.2 Théorie des copules . . . . .	24
4.2.1 Théorème de Sklar . . . . .	25
4.2.2 Théorème de Sklar multidimensionnel . . . . .	27
4.2.3 Présentation de quelques copules . . . . .	28
4.3 Transformation intégrale de probabilité . . . . .	29
4.3.1 Définition et propriétés . . . . .	29
4.3.2 Version empirique . . . . .	31
4.4 Copules à valeurs extrêmes . . . . .	32
<b>Chapitre 5. Revue de littérature sur les tests de dépendance extrême</b>	<b>38</b>
5.1 Description générale de la problématique . . . . .	38
5.2 Méthode du multiplicateur . . . . .	39
5.3 Test de Ben Ghorbal et al. (2009) . . . . .	40
5.4 Test de Quessy (2012) . . . . .	44
5.5 Test de Kojadinovic & Yan (2010) . . . . .	49
<b>Chapitre 6. Sur de nouveaux tests de dépendance extrême</b>	<b>51</b>
6.1 Fonction caractéristique de la transformation intégrale de probabilité . . . . .	51
6.2 Une fonction caractéristique empirique semi-paramétrique . . . . .	52

6.3	Statistiques de test . . . . .	55
6.4	Versions multiplicateurs du processus $\Psi_n$ . . . . .	60
6.4.1	Processus $A_n$ . . . . .	61
6.4.2	Processus $B_n$ . . . . .	64
6.4.3	Processus $\Psi_n$ . . . . .	65
6.5	Versions multiplicateurs de la statistique de test . . . . .	65
6.6	Étude de l'efficacité des tests . . . . .	70
6.6.1	Paramètres de la simulation . . . . .	70
6.6.2	Aptitude à conserver le seuil nominal . . . . .	71
6.6.3	Puissance sous la copule de Clayton . . . . .	72
6.6.4	Puissance sous la copule de Frank . . . . .	72
6.6.5	Puissance sous la copule Normale . . . . .	73
<b>Chapitre 7. Conclusion</b>		<b>78</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>80</b>
<b>Annexe A. Programmes en Matlab</b>		<b>84</b>
A.1	Programmes utilitaires . . . . .	84
A.1.1	Transformation d'un vecteur de données en rangs . . . . .	84
A.1.2	Simulation de paires selon un modèle de copule choisi . . . . .	85
A.1.3	Calcul du tau de Kendall empirique . . . . .	91
A.2	Tests d'extrêmes bivariées . . . . .	92
A.2.1	Statistique de test et valeur critique . . . . .	92
A.2.2	Évaluation de la puissance du nouveau test . . . . .	95
A.2.3	Création d'un tableau avec les résultats de puissance . . . . .	96
A.2.4	Évaluation de la fonction $K_\tau$ au point $w$ . . . . .	97
A.2.5	Simulation de données de la loi $K_\tau$ . . . . .	98

# LISTE DES TABLEAUX

6.1	Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Gumbel–Hougaard pour les tests basés sur $S_n^{.05}$ , $S_n^{.1}$ , $S_n^{.25}$ , $S_n^{.5}$ et $S_n^1$ avec $M = 1\,000$ échantillons multiplicateurs. . . . .	74
6.2	Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Clayton pour les tests basés sur $S_n^{.05}$ , $S_n^{.1}$ , $S_n^{.25}$ , $S_n^{.5}$ et $S_n^1$ avec $M = 1\,000$ échantillons multiplicateurs. . . . .	75
6.3	Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Frank pour les tests basés sur $S_n^{.05}$ , $S_n^{.1}$ , $S_n^{.25}$ , $S_n^{.5}$ et $S_n^1$ avec $M = 1\,000$ échantillons multiplicateurs. . . . .	76
6.4	Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle Normal pour les tests basés sur $S_n^{.05}$ , $S_n^{.1}$ , $S_n^{.25}$ , $S_n^{.5}$ et $S_n^1$ avec $M = 1\,000$ échantillons multiplicateurs. . . . .	77

## LISTE DES FIGURES

- 6.1 Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^{\mathcal{G}}$  avec  $d\mathcal{G}(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,25$  . . . . . 60
- 6.2 Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^{\mathcal{G}}$  avec  $d\mathcal{G}(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,50$  . . . . . 61
- 6.3 Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^{\mathcal{G}}$  avec  $d\mathcal{G}(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,75$  . . . . . 62



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

L'étude du lien de dépendance qui existe entre deux variables aléatoires est un sujet d'importance dans beaucoup de domaines scientifiques. On pense d'emblée à l'hydrologie, la climatologie et la finance, où de nombreuses variables aléatoires entrent en action. Par exemple, supposons que l'on s'intéresse à l'interdépendance qui existe entre les crues printanières observables sur deux rivières voisines. Une modélisation appropriée de ce phénomène permettrait de répondre à diverses questions ou à effectuer de nombreux types de prévision. À titre d'exemple, quelle est la probabilité qu'une des deux rivières sorte de son lit, sachant que l'autre rivière est sortie de son lit ?

Dans certains cas, le lien qui existe entre deux variables aléatoires a une forme particulièrement simple, comme par exemple une relation proportionnelle ou *linéaire*. Dans ce cas, les méthodes dites *classiques*, basées sur la loi Normale multidimensionnelle et le coefficient de corrélation de Pearson, sont appropriées. Par contre, pour de nombreux phénomènes physiques, la nature de la dépendance est non-linéaire, ce qui nécessite de sortir du cadre théorique de la loi Normale. Une approche très efficace consiste à utiliser les copules, car elles permettent de modéliser tous les types de dépendance.

Un type particulier de dépendance est la soi-disant *dépendance extrême*. Dans l'exemple précédent concernant les crues sur deux rivières voisines, on peut s'attendre à ce type de comportement puisque les mesures qui sont prises sont des maximums annuels. Il existe une classe de modèles de dépendance, à savoir les *copules à valeurs extrêmes*, qui permettent de faire de la modélisation dans ce contexte. La modélisation de phénomènes extrêmes se fait généralement en *choisissant* une copule extrême et en estimant ses paramètres. Sur la base de ce modèle, on peut, par exemple, effectuer des calculs de risque.

Cependant, en face d'un phénomène donné, il n'est pas certain que son comportement de dépendance soit réellement de nature extrême. Il conviendrait donc, dans une première étape, de valider cette hypothèse. Dans le cas d'un rejet, il serait plus approprié d'effectuer une modélisation via un modèle non extrême. Suite à son acceptation, toutefois, l'utilisation d'un modèle extrême serait tout-à-fait convenable.

Dans ce mémoire, nous allons développer de nouveaux tests pour vérifier si un couple de variables aléatoires se comporte de manière extrême. Pour ce faire, une fonction caractéristique associée à la transformation intégrale de probabilité d'une loi conjointe sera définie. Ensuite, un estimateur de cette fonction sera proposé. Des statistiques de test basées sur la différence entre cet estimateur et son équivalent théorique attendu sous l'hypothèse nulle seront alors définies. Le calcul des valeurs critiques, qui s'avère très difficile puisque la loi sous  $\mathcal{H}_0$  n'a pas de forme complètement connue, est assuré par une judicieuse application de la méthode du multiplicateur. Une étude de simulation montre l'efficacité des nouveaux tests.

Le mémoire est structuré de la manière suivante. Au Chapitre 2, un rappel sur les fonctions caractéristiques est présenté. Au Chapitre 3, quelques méthodes classiques d'inférence basées sur la fonction caractéristique empirique sont décrites. Le Chapitre 4 se veut une introduction à la théorie des copules, avec une emphase particulière sur les modèles de dépendance extrême. Le Chapitre 5 offre une revue de littérature concernant quelques tests de dépendance extrême récemment proposés. Le Chapitre 6, qui constitue l'apport original de ce travail, donne tous les détails concernant le développement de nos nouvelles statistiques de test et le calcul des valeurs critiques; les propriétés empiriques sont également étudiées à l'aide de simulations de type Monte-Carlo. Enfin, les programmes en langage Matlab qui ont servi pour cette étude de simulations sont présentés à l'Annexe A.

## CHAPITRE 2

### FONCTION CARACTÉRISTIQUE

#### 2.1 Définition

Soit  $X$ , une variable aléatoire continue de densité  $f_X$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$ . Si  $F_X$  est la fonction de répartition associée à  $f_X$ , alors la fonction caractéristique de  $X$  est définie par

$$\psi_X(t) = \mathbb{E} \{ \exp(itX) \} = \int_{\mathcal{X}} \exp(itx) dF_X(x), \quad (2.1)$$

où  $i = \sqrt{-1}$ . On remarque que cette définition de fonction caractéristique est similaire à celle de la fonction génératrice des moments. En fait, comme

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} \psi_X(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{X}} (ix)^k \exp(itx) dF_X(x) \\ &= i^k \int_{\mathcal{X}} x^k dF_X(x) \\ &= i^k \mathbb{E}(X^k), \end{aligned}$$

on a

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{1}{i^k} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} \psi_X(t).$$

On peut donc retrouver les moments d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  d'une variable aléatoire à partir de sa fonction caractéristique.

**Exemple 2.1.** Si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors la fonction caractéristique est

$$\begin{aligned}\psi_Z(t) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(itz) \phi(z) \, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((z - it)^2 + t^2) \right\} \, dz \\ &= \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) \times \int_{\mathbb{R}} \phi(z - it) \, dz \\ &= \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right).\end{aligned}$$

De là, si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors on a la représentation  $X = \sigma Z + \mu$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \mathbb{E} \{ \exp(itX) \} \\ &= \mathbb{E} \{ \exp(it\sigma Z + it\mu) \} \\ &= \exp(it\mu) \mathbb{E} \{ \exp(it\sigma Z) \} \\ &= \exp(it\mu) \psi_Z(\sigma t) \\ &= \exp \left( it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right).\end{aligned}$$

**Exemple 2.2.** Si  $X$  suit une loi exponentielle, sa densité est de la forme

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} \exp \left( -\frac{x}{\lambda} \right), \quad x > 0.$$

La fonction caractéristique associée est donc

$$\begin{aligned}
 \psi_X(t) &= \int_0^\infty \exp(itx) \frac{1}{\lambda} \times \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \exp\left(itx - \frac{x}{\lambda}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \exp\left\{-x \left(\frac{1}{\lambda} - it\right)\right\} dx \\
 &= \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - it\right)} \\
 &= (1 - \lambda it)^{-1}.
 \end{aligned}$$

De là, on montre que

$$\frac{d^k}{dt^k} \psi_X(t) = i^k k! \lambda^k (1 - \lambda it)^{-(k+1)},$$

ce qui fait que

$$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} i^k k! \lambda^k (1 - \lambda it)^{-(k+1)} = k! \lambda^k.$$

**Exemple 2.3.** Soit  $X$  de loi Gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , c'est-à-dire que sa densité est

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}, \quad x > 0.$$

Dans ce cas, la fonction caractéristique est

$$\begin{aligned}
 \psi_X(t) &= \int_0^\infty \exp(itx) \times \frac{x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta)}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \int_0^\infty \exp\left(itx - \frac{x}{\beta}\right) x^{\alpha-1} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \int_0^\infty \exp\left\{-x \left(\frac{1}{\beta} - it\right)\right\} x^{\alpha-1} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \times \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\frac{1}{\beta} - it\right)^\alpha} \\
 &= (1 - \beta it)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

On a

$$\frac{d^k}{dt^k} \psi_X(t) = i^k \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha + j) \right\} \beta^k (1 - \beta it)^{-(\alpha+k)},$$

donc

$$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} i^k \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha + j) \right\} \beta^k (1 - \beta it)^{-(\alpha+k)} = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha + j) \right\} \beta^k.$$

On retrouve les résultats obtenus à l'Exemple 2.2 lorsque  $\alpha = 1$  et  $\beta = \lambda$ .

**Exemple 2.4.** Si  $X$  est de loi de Cauchy standard, alors sa densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction caractéristique associée est alors

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2} dx.$$

Cette intégrale est beaucoup plus facile à calculer lorsqu'on passe par le plan complexe. En utilisant le lemme de Jordan, on parvient à montrer que

$$\begin{aligned} \psi_X(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-|t|} \pi \\ &= e^{-|t|}. \end{aligned}$$

## 2.2 Théorème d'inversion

Le Théorème d'inversion permet de déduire la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction caractéristique. Supposons que  $X$  est une variable

aléatoire qui possède une densité et dont la fonction caractéristique  $\psi_X$  est intégrable. Le Théorème d'inversion stipule que la densité de  $X$  est

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx) \psi_X(t) dt.$$

**Exemple 2.5.** Prenons la fonction caractéristique de la loi  $N(0, 1)$  obtenue à l'exemple 2.1, à savoir  $\psi_X(t) = e^{-t^2/2}$ . Par le Théorème d'inversion, la densité associée est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-itx) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(2itx + t^2)\right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(t+ix)^2 + x^2}{2}\right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \times \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t+ix)^2}{2}\right\} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \times \int_{\mathbb{R}} \phi(t+ix) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

*Il s'agit bel et bien de la densité de la loi normale centrée réduite.*

## 2.3 Extension multivariée

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$ , un vecteur aléatoire prenant ses valeurs dans un ensemble  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Pour  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)^\top$ , la fonction caractéristique multivariée est définie par

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E} \left\{ \exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X}) \right\} = \int_{\mathcal{X}} \exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{x}) dH(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$



où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^\top$  et  $H$  est la fonction de répartition de  $\mathbf{X}$ . On voit que cette définition est une généralisation de l'expression dans le cas univarié.

**Exemple 2.6.** Soit  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}_d, I_d)$ , où  $\mathbf{0}_d = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$  et  $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$  est la matrice identité à  $d$  dimensions. Alors la fonction caractéristique de  $\mathbf{Z}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{z}) \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \mathbf{z}\right) d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{z} - i\mathbf{t})^\top (\mathbf{z} - i\mathbf{t}) + \mathbf{t}^\top \mathbf{t}}{2}\right\} d\mathbf{z} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right). \end{aligned}$$

**Exemple 2.7.** En utilisant le résultat de l'exercice 2.6, on peut obtenir l'expression de la fonction caractéristique de  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ . D'abord, on utilise la caractérisation  $\mathbf{X} = \Sigma^{1/2} \mathbf{Z} + \mu$ , où  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}_d, I_d)$ . De là, par des calculs similaires au cas univarié,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E} \left\{ \exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X}) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \exp(i\mathbf{t}^\top \Sigma^{1/2} \mathbf{Z} + i\mathbf{t}^\top \mu) \right\} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \mu) \times \mathbb{E} \left\{ \exp(i\mathbf{t}^\top \Sigma^{1/2} \mathbf{Z}) \right\} \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \mu) \times \psi_{\mathbf{Z}}(\Sigma^{1/2} \mathbf{t}) \\ &= \exp(i\mathbf{t}^\top \mu) \times \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right) \\ &= \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu - \frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right). \end{aligned}$$

## 2.4 Preuve du Théorème central limite

Le Théorème central limite est un résultat important concernant la moyenne empirique de variables aléatoires indépendantes. Il sera d'abord énoncé, et sa preuve sera obtenue à l'aide de la fonction caractéristique.

**Théorème 2.1.** *Soit la suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ , où  $X_i$  est de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . Alors  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , où  $\rightsquigarrow$  signifie la convergence en loi.*

**Démonstration.** Soit  $Y_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . On aura  $Y_n \rightsquigarrow Y$  si et seulement si la fonction caractéristique de  $Y_n$  converge vers celle de  $Y$ , c'est-à-dire si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\psi_{Y_n}(t) \rightarrow \psi_Y(t)$ . On note d'abord que

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

où  $Y_i = X_i - \mu$  sont telles que  $E(Y_i) = 0$  et  $\text{var}(Y_i) = \sigma^2$ . La fonction caractéristique de  $Y_n$  s'écrit donc

$$\begin{aligned} \Psi_{Y_n}(t) &= E \left\{ \exp \left( it \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \right) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n E \left\{ \exp \left( i \frac{t}{\sqrt{n}} Y_i \right) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \psi_{Y_i} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \left\{ \psi_{Y_i} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n. \end{aligned}$$

Par un développement de Taylor d'ordre deux autour de  $t = 0$ , on a

$$\begin{aligned}\psi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &\approx \psi_{Y_i}(0) + \psi'_{Y_i}(0)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\psi''_{Y_i}(0)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n},\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $\psi'_{Y_i}(0) = E(Y_i) = 0$  et  $\psi''_{Y_i}(0) = -E(Y_i^2) = -\sigma^2$ . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{Y_n}(t) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)^n = e^{-\sigma^2 t^2/2}.$$

Cette dernière fonction caractéristique est celle de  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

## CHAPITRE 3

# MÉTHODES D'INFÉRENCE BASÉES SUR LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE

### 3.1 Fonction caractéristique empirique

Soient  $X_1, \dots, X_n$ , des observations indépendantes de loi  $F_X$ . Une estimation de la fonction caractéristique consiste à remplacer  $F_X$  par son estimation via la fonction de répartition empirique dans l'équation (2.1). Spécifiquement, si

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq x),$$

alors la fonction caractéristique empirique est définie par

$$\psi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) dF_n(x). \quad (3.1)$$

En notant que  $dF_n$  accorde un poids de  $1/n$  à chaque observation de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ , on obtient la formule explicite

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itX_j).$$

Feuerverger & Mureika (1977) utilisent le fait que  $\psi_n$  est une moyenne pour obtenir, de la loi forte des grands nombres, que  $\psi_n(t) \rightarrow \psi(t)$  presque sûrement. Ces auteurs montrent en outre que pour tout  $T < \infty$  fixé,

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq T} |\psi_n(t) - \psi(t)| = 0 \right\} = 1.$$

Soit maintenant le processus à valeurs complexes défini par

$$\Psi_n(t) = \sqrt{n} \{ \psi_n(t) - \psi(t) \}.$$

Soit aussi un processus gaussien complexe  $\Psi$  défini sur  $\mathbb{R}$  dont la moyenne est 0 et qui satisfait  $\Psi(t) = \Psi(-t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On suppose aussi que  $\Psi$  possède la même structure de covariance que  $\Psi_n$ .

Feuerverger & Mureika (1977) ont obtenu que sur n'importe quel intervalle fini  $I \subseteq \mathbb{R}$ , on a  $\Psi_n \rightsquigarrow \Psi$ , où  $\rightsquigarrow$  dénote la convergence faible, ou convergence en loi. Il est donc clair que la fonction caractéristique empirique constitue une bonne estimation de la fonction caractéristique sous-jacente à une loi.

Dans la suite, on présente quelques applications statistiques basées sur la fonction caractéristique empirique. Ces méthodologies concernent la sélection de modèles via les tests d'adéquations, ainsi que les tests de comparaison de lois de probabilité.

## 3.2 Tests d'adéquation

Soit  $X$ , une variable aléatoire de loi  $F_X$ , ainsi que des copies indépendantes  $X_1, \dots, X_n$ . Dans un but de modélisation, on cherche souvent à vérifier si la

loi de  $X$  appartient à une certaine famille de lois de probabilités. Autrement dit, pour une famille de lois  $\mathcal{F} = \{F_\theta; \theta \in \Theta\}$ , on veut confronter les hypothèses nulle et alternative

$$\mathcal{H}_0 : F_X \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : F_X \notin \mathcal{F}. \quad (3.2)$$

Ainsi, dire que  $F_X \in \mathcal{F}$  est équivalent à ce que  $F_X = F_{\theta_0}$  pour un certain  $\theta_0 \in \Theta$ . Lorsque l'espace des paramètres ne contient qu'un seul élément, on dit que les hypothèses (3.2) sont *fixes*.

Comme cas particulier, on retrouve l'hypothèse de normalité lorsque  $\mathcal{F}$  est la famille des lois de probabilité normales, caractérisées par les densités de la forme

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . Le test développé par Epps & Pulley (1983) est conçu justement pour les hypothèses de normalité; il est décrit à la sous-section suivante. Des méthodologies qui s'appliquent à des familles de lois générales sont détaillées dans les autres sous-sections. L'idée maîtresse de ces méthodes statistiques consiste à comparer la fonction caractéristique empirique, basée sur  $X_1, \dots, X_n$ , à la fonction caractéristique de la loi attendue sous  $\mathcal{H}_0$ .

### 3.2.1 Méthodologie de Epps & Pulley (1983)

Ces auteurs se sont intéressés à l'hypothèse de normalité, c'est-à-dire au cas où  $\mathcal{F} = \{f_X(x; \mu, \sigma); \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$  est la famille Normale de paramètres  $\mu$

et  $\sigma^2$  inconnus. De l'exemple 2.1, la fonction caractéristique sous  $\mathcal{H}_0$  est

$$\Psi_{\mu,\sigma}(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

De là, Epps & Pulley (1983) ont proposé des statistiques de test de la forme

$$T_{n,\mathcal{G}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(t) - \psi_{\bar{X}_n, S_n}(t)|^2 d\mathcal{G}(t), \quad (3.3)$$

où  $d\mathcal{G}$  agit comme fonction de poids. À noter qu'ici,  $\mu$  et  $\sigma^2$  ont été estimés par la moyenne  $\bar{X}_n$  et la variance  $S_n^2$  empiriques, ce qui fait que

$$\psi_{\bar{X}_n, S_n}(t) = \exp\left(it\bar{X}_n - \frac{S_n^2 t^2}{2}\right).$$

La fonction  $d\mathcal{G}$  dans l'équation (3.3) doit respecter certaines conditions qui sont détaillées par Epps & Pulley (1983). Dans le cas particulier où

$$d\mathcal{G}(t) \propto \exp\left(-\frac{\alpha^2 S_n^2 t^2}{2}\right)$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , ces auteurs montrent que

$$\begin{aligned} T_{n,\mathcal{G}} = T_{n,\alpha} &= \left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right)^{-1/2} + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\left\{-\frac{(X_j - X_k)^2}{2\alpha^2 S_n^2}\right\} \\ &\quad - \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \exp\left\{-\frac{(X_j - \bar{X}_n)^2}{2S_n^2(1 + \alpha^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, les auteurs suggèrent d'utiliser plutôt la statistique modifiée  $T_{n,\alpha}^* = -\ln(n T_{n,\alpha})$ .

### 3.2.2 Méthodologie de Matsui & Takemura (2005)

Soit la densité de la loi de Cauchy donnée par

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\pi \{\beta^2 + (x - \alpha)^2\}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où  $\alpha$  est un paramètre de localisation et  $\beta$  est un paramètre d'échelle. À noter que la variable aléatoire  $Y = (X - \alpha)/\beta$  est distribuée selon la loi de Cauchy standard dont la densité est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On a montré à l'Exercice 2.4 que la fonction caractéristique dans ce cas est  $\psi_Y(t) = e^{-|t|}$ . Matsui & Takemura (2005) se sont intéressés à tester l'hypothèse que des observations  $X_1, \dots, X_n$  proviennent de la loi de Cauchy. À l'instar de Epps & Pulley (1983), les statistiques de test qu'ils ont proposées sont de la forme

$$D_{n,\mathcal{G}} = n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'_n(t) - e^{-|t|}|^2 d\mathcal{G}(t).$$

Toutefois, la fonction de répartition empirique  $\psi'_n$  est obtenue à partir des *pseudo-observations*  $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ , où pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$Y_{j,n} = \frac{X_j - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}.$$

Ici,  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  sont des estimateurs des paramètres. Dans le cas particulier où

$$d\mathcal{G}(t) = e^{-\kappa|t|}, \quad \kappa > 0,$$

Matsui & Takemura (2005) obtiennent

$$D_{n,\mathcal{G}} = D_{n,\kappa} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\kappa}{\kappa^2 + (Y_{j,n} - Y_{k,n})^2} - 4 \sum_{j=1}^n \frac{1 + \kappa}{(1 + \kappa)^2 + Y_{j,n}^2} + \frac{2n}{2 + \kappa}.$$

Ils montrent aussi qu'une représentation équivalente de cette statistique est

$$D_{n,\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} |Z_n(t)|^2 \hat{\beta} e^{-\hat{\beta}\kappa|t|} dt,$$



où

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left[ \cos(tX_j) + \sin(tX_j) - e^{-\hat{\beta}|t|} \{ \cos(t\hat{\alpha}) + \sin(t\alpha_n) \} \right].$$

Ils se servent de cette écriture pour déduire le comportement asymptotique de  $D_{n,\kappa}$  sous l'hypothèse nulle.

### 3.2.3 Méthodologie de Towhidi & Salmanpour (2007)

Ces auteurs reprennent une approche employée par Fan (1997) basée sur les composantes principales de Wald. D'abord, soit un ensemble  $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_m\}$  de nombres réels. On définit ensuite les vecteurs

$$\boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{t}) = (\psi_n(t_1), \dots, \psi_n(t_m))$$

et

$$\boldsymbol{\psi}_\theta(\mathbf{t}) = (\psi_\theta(t_1), \dots, \psi_\theta(t_m)),$$

où  $\psi_\theta$  est la fonction caractéristique sous  $\mathcal{H}_0$ . En posant

$$\mathbf{Z}_n(\mathbf{t}) = (\Re\{\boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{t})\}, \Im\{\boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{t})\})^\top \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{t}) = (\Re\{\boldsymbol{\psi}_\theta(\mathbf{t})\}, \Im\{\boldsymbol{\psi}_\theta(\mathbf{t})\})^\top,$$

où  $\Re(z)$  et  $\Im(z)$  dénotent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe  $z$ , la statistique de test est

$$T_n = \{\mathbf{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{t})\}^\top \Omega^{-1/2} W_\lambda(\mathbf{t}) \Omega^{-1/2} \{\mathbf{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{t})\},$$

où  $W_\lambda(\mathbf{t})$  est une matrice diagonale contenant les poids et  $\Omega$  est la matrice de variance-covariance de

$$Y(\mathbf{t}) = (\cos(t_1 X), \dots, \cos(t_m X), \sin(t_1 X), \dots, \sin(t_m X))^\top.$$

Towhidi & Salmanpour (2007) proposent toutefois une version modifiée de cette statistique de test en prenant seulement  $k$  valeurs propres sur les  $2 \times m$  disponibles. Ils choisissent la valeur de  $k$  de telle sorte que le quotient

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \bigg/ \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j$$

soit près de 1. Leur statistique de test est alors

$$T_n^* = (\mathbf{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{t}))^\top B \Lambda^{-1} B^\top (\mathbf{Z}_n(\mathbf{t}) - \mathbf{Z}_\theta(\mathbf{t})),$$

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale  $k \times k$  dont les valeurs sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et  $B$  est une matrice  $2m \times k$  dont les colonnes sont les vecteurs propres associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Towhidi & Salmanpour (2007) montrent que  $T_n^*$  converge vers une loi khi-carré à  $k$  degrés de liberté.

### 3.2.4 Méthodologie de Jiménez-Gamero et al. (2009)

Ces auteurs considèrent les hypothèses (3.2) dans le cas général. Ils proposent d'utiliser la classe de statistiques de test de la forme

$$V_{n,\mathcal{G}} = n \int |\psi_n(t) - \psi_{\hat{\theta}}(t)|^2 d\mathcal{G}(t),$$

où  $\hat{\theta}$  est un estimateur de  $\theta$  et  $G$  est une fonction de répartition qui peut dépendre de  $\theta$ . Le choix de la fonction de poids  $d\mathcal{G}$  a une influence sur le calcul et la puissance de cette statistique. Jiménez-Gamero et al. (2009) ont montré qu'une représentation simple et explicite de  $V_{n,\mathcal{G}}$  est donnée par

$$V_{n,\mathcal{G}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{\hat{\theta}}(X_j, X_k).$$

Ici,  $\delta_\theta(x, y) = \nu(x - y) - \nu_\theta(x) - \nu_\theta(y) + \mathcal{V}_\theta$ , où

$$\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) d\mathcal{G}(x)$$

est la partie réelle de la fonction caractéristique de  $\mathcal{G}$ , alors que

$$\nu_\theta(x) = \int \nu(x - y) dF_X(y; \theta)$$

et

$$\mathcal{V}_\theta = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \nu(x - y) dF_X(x; \theta) dF_X(y; \theta).$$

Cette écriture fait ressortir le fait que  $V_{n,\mathcal{G}}$  est une V-statistique de degré deux. Cette constatation permet à Jiménez-Gamero et al. (2009) d'obtenir son comportement asymptotique en loi sous  $\mathcal{H}_0$ , caractérisée par une somme pondérée de variables khi-carrés indépendantes à un degré de liberté. Toutefois, comme les poids dans cette représentation asymptotique sont difficiles à obtenir, ces auteurs ont recours à la méthode du bootstrap pour calculer la valeur critique du test basé sur  $V_{n,\mathcal{G}}$ .

### 3.3 Test de Alba Fernández et al. (2008)

Soient deux vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On souhaite confronter les hypothèses que les lois respectives  $H_{\mathbf{X}}$  et  $H_{\mathbf{Y}}$  de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont les mêmes, c'est-à-dire  $\mathcal{H}_0 : H_{\mathbf{X}} = H_{\mathbf{Y}}$  et  $\mathcal{H}_1 : H_{\mathbf{X}} \neq H_{\mathbf{Y}}$ . Puisqu'une fonction caractéristique *caractérise* une loi de probabilité, une façon équivalente d'écrire ces hypothèses est  $\mathcal{H}_0 : \psi_{\mathbf{X}} = \psi_{\mathbf{Y}}$  et  $\mathcal{H}_1 : \psi_{\mathbf{X}} \neq \psi_{\mathbf{Y}}$ , où  $\psi_{\mathbf{X}}$  et  $\psi_{\mathbf{Y}}$  sont les fonctions caractéristiques de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , respectivement. Cette écriture suggère

de tester  $\mathcal{H}_0$  face à  $\mathcal{H}_1$  en utilisant les fonctions caractéristiques empiriques. Soient donc des échantillons indépendants  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  et  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m$ , qui sont en fait des copies des variables aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , respectivement. De là, on calcule les fonctions caractéristiques empiriques, notées  $\psi_n$  et  $\psi_m$ . La statistique de test proposée est basée sur la mesure de distance entre deux fonctions caractéristiques

$$\mathcal{D}(\psi_{\mathbf{X}}, \psi_{\mathbf{Y}}) = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) - \psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t})|^2 d\mathcal{G}(\mathbf{t}).$$

La version empirique de  $\mathcal{D}$  est alors

$$\mathcal{D}_{n,m} = \mathcal{D}(\psi_n, \psi_m) = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_n(\mathbf{t}) - \psi_m(\mathbf{t})|^2 d\mathcal{G}(\mathbf{t}).$$

Alba Fernández et al. (2008) montrent que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n,m} &= \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \xi(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k) + \frac{1}{m^2} \sum_{j,k=1}^m \xi(\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_k) \\ &\quad - \frac{2}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \xi(\mathbf{X}_j - \mathbf{Y}_k), \end{aligned}$$

où

$$\xi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\mathbf{x}^\top \mathbf{t}) d\mathcal{G}(\mathbf{x})$$

est la partie réelle de la fonction caractéristique de  $\mathcal{G}$ . Comme  $\mathcal{D}_{n,m}$  est une  $V$ -statistique d'ordre deux, il est possible de montrer que

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \mathcal{D}_{n,m}$$

converge en loi vers une somme pondérée de variables indépendantes de loi khi-carré à un degré de liberté. Puisque les poids qui se retrouvent dans cette représentation asymptotique sont difficiles à obtenir, les valeurs critiques s'obtiennent à l'aide du bootstrap ou d'une méthode de permutations.

## CHAPITRE 4

# COPULES & COPULES À VALEURS EXTRÊMES

### 4.1 Lois de probabilité multidimensionnelles

#### 4.1.1 Densités & fonctions de répartition

Soit le vecteur de variables aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ , où la variable aléatoire  $X_j$  prend ses valeurs dans l'espace  $\mathcal{X}_j$ ; ainsi,  $\mathbf{X}$  prend ses valeurs dans l'espace produit  $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_d$ . Si  $X_1, \dots, X_d$  sont toutes continues, alors le Théorème de Radon–Nicodym (voir Shao (2003)) assure qu'il existe une densité  $h$  définie sur  $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_d \subseteq \mathbb{R}^d$  telle que

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_d \in A_d) = \int_{A_1} \dots \int_{A_d} h(\nu_1, \dots, \nu_d) d\nu_d \dots d\nu_1.$$

La fonction  $h$  doit être telle que  $h(x_1, \dots, x_d) \geq 0$  pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_d$  et

$$\int_{\mathcal{X}_1} \dots \int_{\mathcal{X}_d} h(\nu_1, \dots, \nu_d) d\nu_d \dots d\nu_1 = 1.$$

À partir de cette densité, on obtient la fonction de répartition de  $\mathbf{X}$  par

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_d) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} h(\nu_1, \dots, \nu_d) d\nu_d \cdots d\nu_1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il est également possible de retrouver la densité de  $\mathbf{X}$  à partir de sa fonction de répartition; en effet, on a

$$h(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} H(x_1, \dots, x_d).$$

### 4.1.2 Lois marginales

À partir de la densité et de la fonction de répartition d'un vecteur de variables aléatoires, on peut en déduire le comportement marginal de chacune des variables. Ainsi, la fonction de répartition marginale de la variable aléatoire  $X_j$  s'obtient en faisant

$$F_j(x_j) = P(X_j \leq x_j) = \lim_{x_k \rightarrow \infty, k \neq j} H(x_1, \dots, x_d). \quad (4.2)$$

Par exemple, dans le cas  $d = 3$ , les lois marginales de  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  de loi  $H$  sont données par

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \lim_{x_3 \rightarrow \infty} H(x_1, x_2, x_3), \\ F_2(x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \lim_{x_3 \rightarrow \infty} H(x_1, x_2, x_3), \\ F_3(x_3) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \lim_{x_2 \rightarrow \infty} H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

### 4.1.3 Loi normale multidimensionnelle

Afin de décrire la loi normale multidimensionnelle, soit d'abord une matrice  $\Sigma$  définie positive de dimension  $d \times d$ ; dans ce cas, il existe une matrice symétrique  $\Sigma^{1/2}$  de dimension  $d \times d$  telle que  $\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2}$ . Soit aussi un vecteur  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  et des variables aléatoires indépendantes  $Z_1, \dots, Z_d$  telles que  $Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . On dit que le vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  défini par

$$\mathbf{X} = \Sigma^{1/2} \mathbf{Z} + \mu, \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ , est distribué selon une loi normale à  $d$  dimensions de matrice de variance-covariance  $\Sigma$  et de moyenne  $\mu$ . On écrit alors

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma).$$

À noter que  $\Sigma_{jj} = \text{var}(X_j)$  et que  $\Sigma_{jk} = \text{cov}(X_j, X_k)$ . À partir de la caractérisation (4.3), on peut montrer que la densité de la loi normale  $d$ -dimensionnelle est

$$\phi_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\},$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ .

### 4.1.4 Lois de Farlie–Gumbel–Morgenstern

Soient  $F_1$  et  $F_2$ , des fonctions de répartition univariés. Dans Farlie (1960) et Farlie (1961), on y décrit une famille de lois bivariées de la forme

$$H(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2) \{1 + \theta A(F_1(x_1)) B(F_2(x_2))\}, \quad \theta \in [-1, 1],$$

où  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $A : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $B : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sont des fonctions telles que  $H$  satisfait les conditions pour être une fonction de répartition bivariée. Comme cas particulier lorsque  $A(u) = B(u) = 1 - u$ , on a la distribution de Farlie–Gumbel–Morgenstern standard, à savoir

$$H(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) + \theta F_1(x_1)F_2(x_2) \{1 - F_1(x_1)\} \{1 - F_2(x_2)\}.$$

Farlie (1960, 1961) s’est servi de ces lois pour étudier l’efficacité relative asymptotique de tests d’indépendance basés sur des coefficients de corrélation. En effet, on retrouve l’indépendance lorsque  $\theta = 0$ .

## 4.2 Théorie des copules

Pour étudier un phénomène impliquant deux ou plusieurs variables aléatoires, un élément important à prendre en compte est la dépendance qui peut exister entre les variables. À titre d’exemples, on peut mentionner les crues annuelles en plusieurs endroits sur un même cours d’eau ou le comportement de plusieurs titres boursiers. Classiquement, les méthodes employées pour modéliser plusieurs variables aléatoires sont basées sur la Loi Normale  $d$ -dimensionnelle ou quelques-unes de ses généralisations, par exemple la famille des distributions elliptiques. Ces méthodes ont le désavantage d’imposer une structure à la fois aux marges et à la forme de la dépendance.

Depuis quelques années, la théorie des copules s’est imposée comme étant un outil puissant pour étudier la dépendance. Cette méthode est très flexible car elle permet de choisir la forme de la dépendance indépendamment des lois



marginales. Cette approche est donc souvent plus adéquate que les approches classiques. Dans cette section, les principaux résultats concernant les copules et plusieurs de leurs propriétés sont énoncés.

### 4.2.1 Théorème de Sklar

Le Théorème de Sklar (1959) est un résultat fondamental dans l'étude des copules. En fait, c'est le point de départ de l'analyse de la dépendance sous l'angle des copules. Il permet d'isoler la dépendance qui existe entre deux ou plusieurs variables aléatoires. La version présentée ici concerne le cas bivarié; la sous-section 4.2.2 considère la version générale à  $d \geq 2$  variables.

**Théorème 4.2.** *Soit  $H$ , une fonction de répartition bivariée de marges continues  $F_1$  et  $F_2$ . Alors il existe une unique fonction  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ , on a la représentation*

$$H(x_1, x_2) = C \{F_1(x_1), F_2(x_2)\}.$$

*La fonction  $C$  s'appelle la copule de  $H$ .*

Pour qu'une fonction quelconque  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  soit une copule, elle doit satisfaire les contraintes suivantes :

- (i) pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $C(u, 0) = C(0, u) = 0$ ;
- (ii) pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $C(u, 1) = C(1, u) = u$ ;
- (iii) pour tout  $0 \leq u_1^{(1)} \leq u_1^{(2)} \leq 1$  et  $0 \leq u_2^{(1)} \leq u_2^{(2)} \leq 1$ ,

$$C(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) - C(u_1^{(1)}, u_2^{(2)}) - C(u_1^{(2)}, u_2^{(1)}) + C(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) \geq 0.$$

Le Théorème de Sklar permet de constater qu'une loi conjointe est composée de trois éléments, à savoir

- (1) le comportement marginal de la première variable aléatoire;
- (2) le comportement marginal de la deuxième variable aléatoire;
- (3) la dépendance entre les deux variables aléatoires.

Il est donc possible de modéliser la dépendance en choisissant un modèle de copule, sans se soucier de la forme des lois marginales; il s'agit d'un élément d'une importance capitale.

**Exemple 4.1.** *La fonction*

$$C(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - 1}$$

*est une copule. On pourrait construire un modèle dont la dépendance est caractérisée par  $C$ , et dont les marges sont exponentielles de moyennes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Dans ce cas,  $F_1(x) = 1 - e^{-x/\lambda_1}$  et  $F_2(x) = 1 - e^{-x/\lambda_2}$ , ce qui fait que*

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2) &= C\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} \\ &= \frac{(1 - e^{-x_1/\lambda_1})(1 - e^{-x_2/\lambda_2})}{1 - e^{-x_1/\lambda_1} - e^{-x_2/\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Soit  $(X_1, X_2)$ , un couple de loi  $H$ , de copule  $C$ , et de marges continues  $F_1$  et  $F_2$ . On peut montrer que  $C$  correspond à la loi conjointe de  $U_1 = F_1(X_1)$  et  $U_2 = F_2(X_2)$ . Ainsi, comme  $F_1(X_1)$  et  $F_2(X_2)$  sont des variables uniformes sur  $[0, 1]$ , on conclut que  $C$  est une fonction de répartition de

marges uniformes. En effet,

$$\begin{aligned}
 P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) &= P\{F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2\} \\
 &= P\{X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)\} \\
 &= H\{F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\} \\
 &= C\{F_1 \circ F_1^{-1}(u_1), F_2 \circ F_2^{-1}(u_2)\} \\
 &= C(u_1, u_2).
 \end{aligned}$$

De plus, les copules sont invariantes sous des transformations monotones croissantes. Autrement dit, la copule de  $(X_1, X_2)$  est la même que celle de

$$(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = (a(X_1), b(X_2)),$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions monotones croissantes. En d'autres termes, lorsque la dépendance entre deux variables aléatoires est caractérisée par une certaine copule, celle-ci demeure la même peu importe l'échelle avec laquelle les variables sont mesurées.

### 4.2.2 Théorème de Sklar multidimensionnel

Soit le vecteur aléatoire à  $d$  dimensions  $(X_1, \dots, X_d)$  de fonction de répartition  $H$  définie à l'équation (4.1). Les lois marginales de ces variables aléatoires, définies à l'équation (4.2), sont définies par  $F_j$ . Le Théorème de Sklar multidimensionnel stipule que

$$H(x_1, \dots, x_d) = C\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\},$$

où  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  s'appelle la copule de  $H$ . Dans cette représentation, la fonction  $C$  satisfait

- $C(u_1, \dots, u_d) = 0$  si au moins une des composantes est 0;
- La mesure induite par  $C$  de tout rectangle de  $[0, 1]^d$  doit être non-négative.

À l'instar du cas à deux dimensions, la copule associée à une loi  $H$  à  $d$  dimensions s'obtient par

$$C(u_1, \dots, u_d) = H \{ F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d) \}.$$

### 4.2.3 Présentation de quelques copules

La copule Normale est le modèle de dépendance associé à la loi Normale multidimensionnelle classique. On a donc

$$C_{\Sigma}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \phi_{\Sigma}(\mathbf{s}) \, ds_d \cdots ds_1, \quad (4.4)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\phi_{\Sigma}$  est la densité normale standard à  $d$  dimensions de matrice de corrélation  $\Sigma$ . Ici,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$  et  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ . La copule de Student  $d$ -dimensionnelle se définit de façon similaire à la copule Normale. Soient donc  $h_{\nu}$  et  $F_{\nu}$ , respectivement la densité  $d$ -variée et la fonction de répartition univariée de la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté. La copule de Student associée est

$$C_{\nu}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{F_{\nu}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{F_{\nu}^{-1}(u_d)} h_{\nu}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s}.$$

Une classe générale de copules qui contient comme cas particuliers plusieurs modèles connus, est la famille des copules Archimédiennes  $d$ -dimensionnelles.

Les modèles dans cette classe sont de la forme

$$C_\phi(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^d \phi(u_j) \right\},$$

où  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  est un générateur tel que  $\phi(1) = 0$  et  $\phi^{-1}$  est complètement monotone, c'est-à-dire que pour tout  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \phi^{-1}(t) \geq 0.$$

Par exemple, le générateur de la copule de Clayton est de la forme

$$\phi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}. \quad (4.5)$$

Pour la copule de Gumbel–Hougaard, le générateur est

$$\phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta, \quad \theta \geq 1. \quad (4.6)$$

Enfin, le générateur de la copule de Frank s'écrit

$$\phi_\theta(t) = \ln \left( \frac{1 - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta t}} \right), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.7)$$

À la Section 4.4, on décrira une classe de copules très importante dans ce mémoire de maîtrise, à savoir la famille des copules à valeurs extrêmes.

## 4.3 Transformation intégrale de probabilité

### 4.3.1 Définition et propriétés

La transformation intégrale de probabilité d'une loi de probabilité bivariée  $H$  est définie par

$$K(t) = P \{H(X_1, X_2) \leq t\},$$

où  $(X_1, X_2) \sim H$ . Si  $C$  est la copule de  $H$  et que  $(U_1, U_2) \sim C$ , alors

$$K(t) = K_C(t) = \mathbb{P} \{C(U_1, U_2) \leq t\}.$$

La transformation intégrale de probabilité d'une loi dépend donc uniquement de sa copule, et non de ses marges. Une formule pratique pour le calcul de  $K$  a été proposée par Genest et al. (1998).

**Proposition 4.1.** *Si  $C_{01}(u_1, u_2) = \partial C(u_1, u_2)/\partial u_2$  existe, alors*

$$K_C(t) = t + \int_t^1 C_{01} \{C_{u_2}^{-1}(t), t\} du_2, \quad (4.8)$$

où  $C_{u_2}(u_1) = C(u_1, u_2)$ , c'est-à-dire qu'on fixe le deuxième argument à  $u_2$ .

**Démonstration.** Par la définition de la transformation intégrale de probabilité, on a  $K_C(t) = \mathbb{P} \{C(U_1, U_2) \leq t\} = \mathbb{P} \{C_{U_2}(U_1) \leq t\}$ . En conditionnant par rapport à  $U_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} K_C(t) &= \int_0^1 \mathbb{P} \{C_{u_2}(U_1) \leq t | U_2 = u_2\} du_2 \\ &= t + \int_t^1 \mathbb{P} \{U_1 \leq C_{u_2}^{-1}(t) | U_2 = u_2\} du_2. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que  $\mathbb{P} \{C_{u_2}(U_1) \leq t | U_2 = u_2\} = 1$  lorsque  $u_2 \leq t$ . De plus, comme la loi conditionnelle de  $U_1 | U_2$  est  $C_{01}$ , on a

$$K_C(t) = t + \int_t^1 C_{01} \{C_{u_2}^{-1}(t), u_2\} du_2,$$

ce qui complète la preuve.  $\square$

Voici quelques cas particuliers de calcul de la transformation intégrale de probabilité.

**Exemple 4.2.** Pour la copule d'indépendance  $\Pi(u_1, u_2) = u_1 u_2$ , on a  $C_{u_2}^{-1}(t) = t/u_2$  et  $C_{01}(u_1, u_2) = u_1$ . Ainsi, une application de la formule (4.8) donne  $K_\Pi(t) = t - t \ln t$ .

**Exemple 4.3.** Pour une copule Archimédienne de générateur  $\phi$ , on peut montrer que

$$K_{C_\phi}(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}.$$

En particulier, on obtient pour la copule de Clayton que

$$K_{C_\phi}(t) = \frac{(\theta + 1)t - t^{\theta+1}}{\theta}.$$

### 4.3.2 Version empirique

Les applications subséquentes seront basées sur l'estimation de la fonction  $K$  décrite à la sous-section 4.3.1. Cette version empirique de la transformation intégrale de probabilité fait appel au concept de *pseudo-observation*. Pour décrire l'idée dans le cas bivarié, soit un échantillon  $(X_{11}, X_{21}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$ . Une pseudo-observation tirée de la paire  $(X_{11}, X_{21})$  consiste à lui appliquer une transformation qui dépend de toutes les autres observations; en faisant de même pour toutes les paires, on définit ainsi un nouvel échantillon.

Dans le cas qui nous concerne, soient les pseudo-observations définies, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , par

$$e_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{1k} \leq X_{1j}, X_{2k} \leq X_{2j}).$$

Une version empirique de la transformation intégrale de probabilité est alors

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(e_{j,n} \leq t). \quad (4.9)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on peut montrer que  $K_n(t)$  converge uniformément, pour tous les  $t \in [0, 1]$ , vers  $K(t)$ . Le comportement asymptotique du *processus de Kendall*

$$\mathcal{K}_n(t) = \sqrt{n} \{K_n(t) - K(t)\}.$$

a été étudié en détails par Barbe et al. (1996). Ces auteurs montrent que  $\mathcal{K}_n$  converge en loi, sous certaines hypothèses, vers un processus Gaussien de moyenne zéro et dont la fonction de covariance est de la forme

$$\Gamma(s, t) = K(s \wedge t) - K(s)K(t) + k(s)k(t)R(s, t) - k(t)Q(s, t) - k(s)Q(t, s),$$

où  $k(s) = dK(s)/ds$ . Les expressions compliquées pour  $R(s, t)$  et  $Q(s, t)$  se retrouvent dans l'article de Barbe et al. (1996).

## 4.4 Copules à valeurs extrêmes

Soit  $(X_{11}, X_{12}) \dots (X_{n1}, X_{n2})$  un échantillon tiré de  $\mathbb{R}^2$ . La théorie des valeurs extrêmes bivariées s'intéresse à la loi limite conjointe des variables aléatoires

$$E_{n,1} = \max(X_{11}, \dots, X_{n1}) \quad \text{et} \quad E_{n,2} = \max(X_{12}, \dots, X_{n2}).$$

Les distributions limites, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de

$$(M_{n,1}, M_{n,2}) = \left( \frac{E_{n,1} - a_n}{b_n}, \frac{E_{n,2} - c_n}{d_n} \right)$$



où  $a_n, b_n, c_n, d_n$  sont des suites telles que la loi limite n'est pas dégénérée, sont appelées les lois extrêmes bivariées. Pickands (1981) a démontré que la loi de survie asymptotique de  $(M_{n,1}, M_{n,2})$  peut s'écrire sous la forme

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \exp \left\{ -(x_1 + x_2) A \left( \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right) \right\}, \quad (4.10)$$

où  $A : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$  est une fonction convexe qui satisfait  $A(0) = A(1) = 0$  et  $\max(t, 1 - t) \leq A(t) \leq 1$ . De cette représentation de Pickands (1981), on déduit que la forme des copules à valeurs extrêmes est

$$C_A(u_1, u_2) = \exp \left\{ \ln(u_1 u_2) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right) \right\}. \quad (4.11)$$

Ces copules sont *max-stables*, c'est-à-dire que pour tout  $r > 0$ , on a

$$C(u_1, u_2) = \left\{ C \left( u_1^{1/r}, u_2^{1/r} \right) \right\}^r. \quad (4.12)$$

L'implication inverse est également vraie, c'est-à-dire qu'une copule est extrême si et seulement si elle est max-stable.

Une autre propriété intéressante des copules de la forme (4.11) concerne la transformation intégrale de probabilité décrite en (4.8). En fait, peu importe la forme de la fonction  $A$ , la transformation intégrale de probabilité  $K_A$  de toutes les copules à valeurs extrêmes est de la forme

$$K_A(t) = t - (1 - \tau_A) t \ln t, \quad (4.13)$$

où

$$\tau_A = \int_0^1 \frac{w(1-w)}{A(w)} dA'(w)$$

est le tau de Kendall pour la copule extrême de fonction de dépendance  $A$ . Ce résultat est à la base des nouveaux tests d'extrêmes développés dans ce mémoire. Dans la suite, quelques exemples de copules extrêmes sont donnés.

**Exemple 4.4.** *Le modèle d'extrêmes bivariées le plus simple apparaît lorsque  $A(t) = 1$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a alors*

$$C_A(u_1, u_2) = \exp \{ \ln(u_1 u_2) \times 1 \} = u_1 u_2,$$

*c'est-à-dire la copule d'indépendance.*

**Exemple 4.5.** *Si  $A(t) = \max(t, 1 - t)$ , alors*

$$\begin{aligned} C_A(u_1, u_2) &= \exp \left[ \ln(u_1 u_2) \max \left\{ \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right), 1 - \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right) \right\} \right] \\ &= \exp \{ \min(\ln u_1, \ln u_1 u_2 - \ln u_1) \} \\ &= \exp \{ \min(\ln u_1, \ln u_2) \} \\ &= \min \{ \exp(\ln u_1), \exp(\ln u_2) \} \\ &= \min(u_1, u_2). \end{aligned}$$

*Cette copule est la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding associée à la dépendance positive parfaite.*

**Exemple 4.6.** *Si  $A(t) = \{t^\theta + (1 - t)^\theta\}^{1/\theta}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , alors*

$$\begin{aligned} C_A(u_1, u_2) &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 \left\{ \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right)^\theta + \left( \frac{\ln u_2}{\ln u_1 u_2} \right)^\theta \right\}^{1/\theta} \right] \\ &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 \left\{ \left( \frac{1}{-\ln u_1 u_2} \right)^\theta \left( (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right) \right\}^{1/\theta} \right] \\ &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 \left( \frac{1}{-\ln u_1 u_2} \right) \left\{ (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right\}^{1/\theta} \right] \\ &= \exp \left[ - \left\{ (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta \right\}^{1/\theta} \right]. \end{aligned}$$

*Il s'agit de la copule de Gumbel-Hougaard.*

**Exemple 4.7.** Si  $A(t) = 1 - \{t^{-\theta} + (1-t)^{-\theta}\}^{-1/\theta}$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , alors

$$\begin{aligned}
 C_A(u_1, u_2) &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 \left\{ 1 - \left( \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right)^{-\theta} + \left( \frac{\ln u_2}{\ln u_1 u_2} \right)^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \right\} \right] \\
 &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 \left\{ 1 - \frac{1}{\ln u_1 u_2} \left( (\ln u_1)^{-\theta} + (\ln u_2)^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \right\} \right] \\
 &= \exp \left[ \ln u_1 u_2 - \left\{ (\ln u_1)^{-\theta} + (\ln u_2)^{-\theta} \right\}^{-1/\theta} \right] \\
 &= u_1 u_2 \exp \left[ - \left\{ (\ln u_1)^{-\theta} + (\ln u_2)^{-\theta} \right\}^{-1/\theta} \right].
 \end{aligned}$$

Il s'agit de la copule de Galambos.

**Exemple 4.8.** La copule extrême de Hüsler-Reiss est caractérisée par

$$A(t) = (1-t) \Phi \left\{ \theta + \frac{1}{2\theta} \ln \left( \frac{1-t}{t} \right) \right\} + t \Phi \left\{ \theta + \frac{1}{2\theta} \ln \left( \frac{t}{1-t} \right) \right\}, \quad \theta \geq 0,$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La copule de Tawn est obtenue avec  $A(t) = 1 - \theta t + \theta t^2$ , alors que la copule  $t$ -extrême apparaît avec

$$\begin{aligned}
 A(t) &= t F_{\theta_1+1} \left\{ \frac{\left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/\theta_1} - \theta_2}{\sqrt{1 - \theta_2^2}} \times \sqrt{\theta_1 + 1} \right\} \\
 &\quad + (1-t) F_{\theta_1+1} \left\{ \frac{\left( \frac{1-t}{t} \right)^{1/\theta_1} - \theta_2}{\sqrt{1 - \theta_2^2}} \times \sqrt{\theta_1 + 1} \right\},
 \end{aligned}$$

où  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$  et  $F_\theta$  est la fonction de répartition de la loi de Student à  $\theta$  degrés de liberté.

Les modèles à valeurs extrêmes multidimensionnels sont caractérisés de la même façon que dans le cas bivarié. Ainsi, une copule à valeurs extrêmes multidimensionnelle  $C$  possède la propriété de *max-stabilité*. Une extension

multidimensionnelle de l'équation (4.12) dans le cas  $d = 2$  implique ainsi que pour tout  $r > 0$ ,

$$C(u_1, \dots, u_d) = \left\{ C(u_1^{1/r}, \dots, u_d^{1/r}) \right\}^r. \quad (4.14)$$

Une copule qui satisfait (4.14) est appelée une copule à valeurs extrêmes à  $d$  dimensions. En fait,  $C$  est extrême  $d$ -dimensionnelle si et seulement si elle satisfait (4.14). Pour de telles copules, on a la représentation

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp \{ -\ell(-\ln u_1, \dots, -\ln u_d) \}, \quad (4.15)$$

où la fonction  $\ell : [0, \infty)^d \rightarrow [0, \infty)$  est convexe, homogène d'ordre un, c'est-à-dire que  $\ell(rx_1, \dots, rx_d) = r\ell(x_1, \dots, x_d)$ , et telle que

$$\max(x_1, \dots, x_d) \leq \ell(x_1, \dots, x_d) \leq x_1 + \dots + x_d.$$

Il existe une correspondance entre la fonction  $\ell$  et la fonction  $A$  présente dans la représentation des copules à valeurs extrêmes bivariées. On suppose d'abord une fonction  $A : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$\ell(x_1, \dots, x_d) = (x_1 + \dots + x_d) A\left(\frac{x_1}{x_1 + \dots + x_d}, \dots, \frac{x_d}{x_1 + \dots + x_d}\right).$$

En faisant le changement de variables  $t_d = x_1 + \dots + x_d$  et

$$t_k = \frac{x_k}{x_1 + \dots + x_d}, \quad k \in \{1, \dots, d-1\},$$

cette équation s'écrit

$$\ell\left\{t_d t_1, \dots, t_d t_{d-1}, t_d \left(1 - \sum_{k=1}^{d-1} t_k\right)\right\} = t_d A\left(t_1, \dots, t_{d-1}, 1 - \sum_{k=1}^{d-1} t_k\right).$$

Comme  $\ell$  est homogène d'ordre un, on a finalement

$$A\left(t_1, \dots, t_{d-1}, 1 - \sum_{k=1}^{d-1} t_k\right) = \ell\left(t_1, \dots, t_{d-1}, 1 - \sum_{k=1}^{d-1} t_k\right).$$

De là,

$$\begin{aligned}
& -\ell(-\ln u_1, \dots, -\ln u_d) \\
&= \ln \left( \prod_{j=1}^d u_j \right) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln \left( \prod_{j=1}^d u_j \right)}, \dots, \frac{\ln u_d}{\ln \left( \prod_{j=1}^d u_j \right)} \right) \\
&= \left( \sum_{j=1}^d \ln u_j \right) A \left( \frac{\ln u_1}{\sum_{j=1}^d \ln u_j}, \dots, \frac{\ln u_d}{\sum_{j=1}^d \ln u_j} \right).
\end{aligned}$$

Une autre représentation des copules  $d$ -dimensionnelles s'obtient donc en remplaçant cette expression dans l'équation (4.15). On a alors

$$C_A(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ \left( \sum_{j=1}^d \ln u_j \right) A \left( \frac{\ln u_1}{\sum_{j=1}^d \ln u_j}, \dots, \frac{\ln u_d}{\sum_{j=1}^d \ln u_j} \right) \right\}.$$

À noter que la fonction  $A$  doit satisfaire certaines conditions. Pour plus de détails, voir Gudendorf & Segers (2010). Dans la suite, quelques exemples de copules à valeurs extrêmes multidimensionnelles sont présentés. Il s'agit de versions multidimensionnelles des exemples 4.6 et 4.7.

**Exemple 4.9.** *La copule extrême de Gumbel-Hougaard  $d$ -dimensionnelle est caractérisée par  $\ell(x_1, \dots, x_d) = (x_1^\theta + \dots + x_d^\theta)^{1/\theta}$ , où  $\theta \geq 1$ . La copule à valeurs extrêmes associée est donc*

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ - \left( (-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_d)^\theta \right)^{1/\theta} \right\}.$$

**Exemple 4.10.** *Pour la copule de Galambos, on a*

$$\ell(x_1 \dots x_d) = \sum_{j=1}^d x_j - \sum_{I \subseteq \{1, \dots, d\}, |I| \geq 2} (-1)^{|I|} \left( \sum_{j \in I} x_j^{-\theta} \right)^{-1/\theta}, \quad \text{où } \theta > 0.$$

Une formule simple pour la copule correspondante n'est pas disponible.

## CHAPITRE 5

# REVUE DE LITTÉRATURE SUR LES TESTS DE DÉPENDANCE EXTRÊME

### 5.1 Description générale de la problématique

Soit  $C$ , la copule (inconnue) d'une certaine population. Le but des tests de dépendance extrême est de vérifier si  $C$  appartient à la famille des copules à valeurs extrêmes dont la forme générale est donnée par l'équation (4.11). En d'autres termes, on veut confronter les hypothèses

$$\mathcal{H}_0 : C \in \mathcal{VE} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : C \notin \mathcal{VE}, \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{VE}$  est l'ensemble des copules à valeurs extrêmes bivariées. Les tests de dépendance extrême forment une catégorie de tests qui sont encore en développement; en effet, il existe relativement peu de méthodologies pour les hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  ci-haut.

Dans ce chapitre, les méthodologies statistiques de Ben Ghorbal et al. (2009), Quessy (2012) et Kojadinovic & Yan (2010) sont détaillées. Avant, la méthode

du multiplicateur est expliquée dans le cas général; cette technique est au cœur des tests proposés par Quessy (2012) et Kojadinovic & Yan (2010), et sera une partie importante des tests qui seront développés dans ce mémoire. Cette méthode est intéressante car elle permet de calculer les valeurs critiques de nombreux tests dans le cas d'hypothèses composées.

## 5.2 Méthode du multiplicateur

Soient  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  où  $\mathbf{X}_j \in \mathbb{R}^d$ . On définit le vecteur moyenne  $\mu = E(\mathbf{X}_j) \in \mathbb{R}^d$  et la matrice de variance-covariance  $\Sigma = \text{var}(\mathbf{X}_j) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Soient aussi

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_n = \sqrt{n} (\bar{\mathbf{X}}_n - \mu).$$

On sait, par le Théorème central limite que  $\mathbf{Z}_n \rightsquigarrow \mathbf{Z}$ , où  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Pour obtenir des copies indépendantes de  $\mathbf{Z}$ , on pose pour  $h \in \{1, \dots, M\}$ ,

$$\mathbf{Z}_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\xi_j^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbf{X}_j,$$

où les vecteurs

$$\left( \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)} \right), \dots, \left( \xi_1^{(M)}, \dots, \xi_n^{(M)} \right)$$

sont indépendants et les *multiplicateurs*  $\xi_j^{(h)}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $h \in \{1, \dots, M\}$ , sont des variables aléatoires positives telles que

$$E \left( \xi_j^{(h)} \right) = \text{var} \left( \xi_j^{(h)} \right) = 1.$$

Ici,  $\bar{\xi}^{(h)} = \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} / n$  est la moyenne de  $\xi_1^{(h)}, \dots, \xi_n^{(h)}$ . Le Théorème central limite du multiplicateur stipule que

$$(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_n^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}_n^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)}),$$

où  $\mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)}$  sont des copies indépendantes de  $\mathbf{Z}$ . Ainsi, comme  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ , il s'ensuit que  $\mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)}$  sont de loi  $\mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ .

**Exemple 5.1.** *Une loi qui peut servir dans la méthode du multiplicateur est l'exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . En effet, pour  $X$  qui suit cette loi, on a  $E(X) = \text{var}(X) = 1$  et  $X$  est toujours positive, par définition.*

La méthode du multiplicateur s'applique également au processus empirique  $d$ -varié  $\mathbb{F}_n(\mathbf{x}) = \sqrt{n} \{F_n(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})\}$ , où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  et

$$F_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{X}_j \leq \mathbf{x})$$

est la fonction de répartition empirique multivariée. Les versions multiplicateurs de  $\mathbb{F}_n$  sont alors données par

$$\mathbb{F}_n^{(h)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\xi_j^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbf{1}(\mathbf{X}_j \leq \mathbf{x}).$$

Par des arguments qu'on peut trouver dans les ouvrages de van der Vaart & Wellner (1996) et de Kosorok (2008), on peut montrer que

$$(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{F}_n^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathbb{F}, \mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)}),$$

où  $\mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)}$  sont des copies indépendantes de la limite  $\mathbb{F}$  de  $\mathbb{F}_n$ . À noter que  $\mathbb{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}$ , où  $\mathbb{B}$  est un processus Gaussien centré défini sur  $[0, 1]^d$  et tel que  $\mathbb{B}(s_1, \dots, s_d) = 0$  lorsque  $s_1 \vee \dots \vee s_d \in \{0, 1\}$ .

### 5.3 Test de Ben Ghorbal et al. (2009)

Soit un couple  $(X_1, X_2)$  de loi  $H$  dont les marges sont  $F_1$  et  $F_2$ , et la copule est  $C$ . Ben Ghorbal et al. (2009) ont basé leur test de dépendance extrême sur la



variable aléatoire  $W = H(X_1, X_2)$ . En posant  $U_1 = F_1(X_1)$  et  $U_2 = F_2(X_2)$ , on a que  $W = C(U_1, U_2)$ . Comme  $(U_1, U_2) \sim C$ , le comportement de  $W$  ne dépend que de la copule de  $(X_1, X_2)$ . Tel que vu à l'équation (4.13), la loi  $K_A$  de  $W$ , qui s'appelle la *transformation intégrale de probabilité* de  $H$ , dépend de la fonction de dépendance  $A(t)$ . En fait, la distribution de  $W$  dépend du tau de Kendall  $\tau_A$ , qui lui-même est fonction de  $A$ .

Plutôt que de baser leur test sur  $K_A$ , ces auteurs utilisent une relation particulière entre les moments de la variable aléatoire  $W$ . D'abord, sous l'hypothèse d'extrêmes bivariées, les moments de  $W$  s'écrivent en fonction du tau de Kendall. Spécifiquement, on a que pour chaque  $\ell \in \{1, 2, \dots\}$ ,

$$E(W^\ell) = \frac{\ell \tau_A + 1}{(\ell + 1)^2}.$$

Ensuite, on définit

$$\xi = -1 + 8E(W) - 9E(W^2). \quad (5.2)$$

Sous l'hypothèse que la copule de  $(X_1, X_2)$  appartient à la famille des extrêmes bivariées, on montre facilement que  $\xi = 0$ . L'idée du test de Ben Ghorbal et al. (2009) consiste à définir une version empirique de  $\xi$ . Cependant, la variable aléatoire  $W$  n'est pas observable, puisqu'il s'agit d'une fonction de  $(X_1, X_2)$  via la relation  $W = H(X_1, X_2)$ , et  $H$  est inconnue. Il faudra alors *estimer*  $W$  à l'aide d'une estimation de  $H$ . Spécifiquement, soit un échantillon  $(X_{11}, X_{21}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$  et

$$H_n(x_1, x_2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_{1j} \leq x_1, X_{2j} \leq x_2),$$

la fonction de répartition empirique conjointe. De là, on pourrait définir l'échantillon de *pseudo-observations*  $W_{1,n}, \dots, W_{n,n}$ , où

$$W_{j,n} = H_n(X_{1,j}, X_{2,j}). \quad (5.3)$$

Comme  $H_n$  est un bon estimateur de  $H$ , on s'attend à ce que la loi de  $W_{j,n}$  soit approximativement la loi de  $W$ , c'est-à-dire la transformation intégrale de probabilité de  $H$ . Ainsi, une estimation de  $\xi$  basée sur l'équation 5.2 pourrait être

$$\hat{\xi} = -1 + 8 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_{j,n} - 9 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_{j,n}^2.$$

Toutefois, Ben Ghorbal et al. (2009) utilisent une version légèrement différente de  $\hat{\xi}$ , à savoir

$$\xi_n = -1 + \frac{8}{n(n-1)} \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} I_{jk} - \frac{9}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq j \neq k \neq \ell \leq n} I_{jk} I_{\ell k},$$

où  $I_{jk} = \mathbf{1}(X_{1j} \leq X_{1k}, X_{2j} \leq X_{2k})$ . En fait, l'estimateur  $\xi_n$ , contrairement à  $\hat{\xi}$ , est sans biais. De plus, on peut montrer que  $\xi_n$  est une U-statistique d'ordre trois. Par conséquent, en utilisant les résultats classiques qu'on peut retrouver dans Lee (1990), on obtient que  $\sqrt{n}(\xi_n - \xi)$  converge en loi vers la distribution normale avec une certaine variance  $\sigma_\xi^2$ .

Une idée de test simple consisterait donc à rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  lorsque

$$\sqrt{n} \left| \frac{\xi_n}{\sigma_\xi} \right| > \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ce test n'est malheureusement pas applicable directement, puisque  $\sigma_\xi$  est inconnue. Pour pallier ce problème, Ben Ghorbal et al. (2009) proposent trois estimateurs de cette

variance inconnue. Dans un premier temps, ils ont obtenu une expression explicite pour  $\sigma_\xi^2$  en fonction de la taille échantillonnale  $n$ . Chacune des composantes de cette expression est ensuite estimée à l'aide de la U-statistique

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_n^2 = & 64 \left\{ \frac{A_n}{n(n-1)} - \hat{\mu}_{11} \right\} - 144 \left\{ \frac{B_n}{n(n-1)} - \hat{\mu}_{12} \right\} \\ & + 81 \left\{ \frac{C_n}{n(n-1)(n-2)} - \hat{\mu}_{22} \right\},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}A_n &= \hat{\mu}_1 + (n-2)(\hat{\mu}_2 + 2\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) + (n-2)(n-3)\hat{\mu}_{11}, \\ B_n &= 2\hat{\mu}_2 + 2\hat{\theta}_1 + (n-3)(\hat{\mu}_3 + \hat{\theta}_3 + 2\hat{\theta}_4 + 2\hat{\theta}_5) + (n-3)(n-4)\hat{\mu}_{12}, \\ C_n &= 2\hat{\mu}_2 + (n-3)(4\hat{\mu}_3 + 8\hat{\theta}_3 + 2\hat{\theta}_8) + (n-3)(n-4)(\hat{\mu}_4 + 4\hat{\theta}_6 + 4\hat{\theta}_7) \\ &\quad + (n-3)(n-4)(n-5)\hat{\mu}_{22}.\end{aligned}$$

Dans ces équations,  $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_4, \hat{\mu}_{11}, \hat{\mu}_{12}, \hat{\mu}_{22}$  et  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_8$  sont des sommes pondérées des  $I_{jk}$ ,  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  dont les expressions sont décrites dans Ben Ghorbal et al. (2009). À titre d'exemple,

$$\hat{\mu}_{11} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{j \neq k \neq j' \neq k'} I_{jk} I_{j'k'}.$$

Pour définir un deuxième estimateur, les auteurs utilisent la version asymptotique, c'est-à-dire quand  $n \rightarrow \infty$ , de l'expression pour  $\sigma_\xi^2$ . De cette façon, ils déduisent l'estimateur

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\infty^2 = & 64 \left( \hat{\mu}_2 + 2\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 - 4\hat{\mu}_{11} \right) - 144 \left( \hat{\mu}_3 + \hat{\theta}_3 + 2\hat{\theta}_4 + 2\hat{\theta}_5 - 6\hat{\mu}_{12} \right) \\ & + 81 \left( \hat{\mu}_4 + 4\hat{\theta}_6 + 4\hat{\theta}_7 - 9\hat{\mu}_{22} \right).\end{aligned}$$

Finalement, les auteurs suggèrent, à titre de comparaison, d'utiliser l'estimateur

*jackknife* proposé initialement par Ghoudi et al. (1998), à savoir

$$\hat{\sigma}_J^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n (\xi_n^{(-j)} - \xi_n)^2,$$

où  $\xi_n^{(-j)}$  est la valeur de la statistique  $\xi_n$  obtenue en enlevant la  $j$ -ème observation du jeu de données.

Les auteurs étudient d'abord la puissance des trois tests pour l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  pour des tailles d'échantillons petites, c'est-à-dire  $n \in \{50, 100, 200\}$ . Ils en concluent que les nouveaux tests basés sur  $\hat{\sigma}_n^2$  et  $\hat{\sigma}_\infty^2$  sont généralement plus efficaces que celui de Ghoudi et al. (1998); en outre, les statistiques de test sont beaucoup plus rapides à calculer. Par la suite, les auteurs s'intéressent au comportement asymptotique des statistiques de test sous des hypothèses alternatives. À cette fin, ils utilisent le mélange de copules

$$C_\delta(u_1, u_2) = (1 - \delta) C_A(u_1, u_2) + \delta D(u_1, u_2), \quad \delta \in [0, 1],$$

où  $C_A$  est une copule extrême et  $D$  est une certaine copule. Ils en concluent que la puissance des tests à tailles finies est semblable à ce qui a été calculé théoriquement. L'article se termine par des analyses de vrais jeux de données.

## 5.4 Test de Quessy (2012)

Les tests de Ben Ghorbal et al. (2009) sont basés sur les deux premiers moments de la variable aléatoire  $W = C(U_1, U_2)$ . Quessy (2012) a généralisé cette idée en considérant directement la fonction de répartition de  $W$ , à savoir  $K_{C_A}(w) = w - (1 - \tau_A)w \ln w$ , qui a déjà été introduite à l'équation (4.13). À

noter que cette représentation est vraie peu importe la forme de la fonction  $A$  qui définit un modèle de copules extrêmes particulier. Soit donc  $K_C$ , la transformation intégrale de probabilité d'une copule  $C$ . Selon l'équation (4.13), il est possible d'écrire  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  par

$$\mathcal{H}_0 : \exists \tau \in [0, 1] \text{ tel que } K_C(w) = w - (1 - \tau) w \ln w, \forall w \in [0, 1],$$

$$\mathcal{H}_1 : \forall \tau \in [0, 1], \exists w \in [0, 1] \text{ tel que } K_C(w) \neq w - (1 - \tau) w \ln w.$$

Cependant, il s'agit d'hypothèses composées au sens où la valeur de  $\tau$  n'est pas spécifiée. En effet, ce paramètre, sous  $\mathcal{H}_0$ , dépend de la fonction  $A$  qui se trouve dans la définition (4.11); celle-ci n'est pas définie sous l'hypothèse nulle, ce qui posera éventuellement une difficulté pour le calcul des valeurs critiques. Il faudra alors trouver un moyen d'adapter la méthode du multiplicateur afin de tester  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ ; l'idée sera développée plus loin.

L'approche de Quessy (2012) consiste à comparer une estimation entièrement non-paramétrique de  $K_{C_A}$  à une version semi-paramétrique basée sur l'estimation de  $\tau_A$ . Spécifiquement, une estimation de  $K_{C_A}$  valide dans un cadre général est donnée, d'une part, par  $K_n$  définie à l'équation (4.9). D'autre part, une estimation de  $K_{C_A}$  valide sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  est donnée par

$$K_{\tau_n}(w) = w - (1 - \tau_n) w \ln w,$$

où

$$\tau_n = -1 + \frac{4}{n(n-1)} \sum_{j \neq k} \mathbf{1}(X_{j1} < X_{k1}, X_{j2} < X_{k2})$$

est la version empirique usuelle du tau de Kendall. Ensuite, soit le processus

$$\mathbb{K}_n(w) = \sqrt{n} \{K_n(w) - K_{\tau_n}(w)\}.$$

Des statistiques de tests potentiellement plus puissantes que celles proposées par Ben Ghorbal et al. (2009) sont

$$S_n = \int_0^1 \{\mathbb{K}_n(w)\}^2 dw \quad \text{et} \quad T_n = \int_0^1 \{\mathbb{K}_n(w)\}^2 dK_{\tau_n}(w).$$

L'auteur montre que  $\mathbb{K}_n$  converge vers une limite de la forme

$$\mathbb{K}(w) = \mathcal{K}(w) - 4w \ln w \int_0^1 \mathcal{K}(u) du, \quad (5.4)$$

où  $\mathcal{K}$  est la limite de  $\mathcal{K}_n = \sqrt{n}(K_n - K_{\tau_A})$ . Il déduit alors que

$$S_n \rightsquigarrow S = \int_0^1 \{\mathbb{K}(w)\}^2 dw \quad \text{et} \quad T_n \rightsquigarrow T = \int_0^1 \{\mathbb{K}(w)\}^2 dK_{\tau}(w).$$

Quessy (2012) a également proposé des statistiques de test qui généralisent celles de Ghoudi et al. (1998) en utilisant des moments autres que les deux premiers. Pour les décrire, soit d'abord la fonction

$$F_{p,q}(t) = p(q+1)^2 t^q - q(p+1)^2 t^p + q - p.$$

L'idée est basée sur le fait que  $E\{F_{p,q}(W)\} = 0$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ; en posant  $p = 1$  et  $q = 2$ , on remarque que ce résultat est le même que celui présenté à l'équation (5.2). Une statistique de test est donnée par

$$\xi_n^{p,q} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n F_{p,q}(W_{j,n}),$$

où  $W_{1,n}, \dots, W_{n,n}$  sont définies à l'équation (5.3). Il est ensuite montré que  $\xi_n^{p,q}$ , sous  $\mathcal{H}_0$ , converge en loi vers la normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma_{p,q}^2$  qui possède une forme compliquée en terme de la fonction de dépendance  $A$ . Dans le cas de l'indépendance, c'est-à-dire quand  $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ , on a

$$\sigma_{p,q}^2 = p^2 q^2 \left\{ \left( \frac{p+1}{2p+1} \right)^2 + \left( \frac{q+1}{2q+1} \right)^2 - \frac{2(p+1)(q+1)}{(p+q+1)^2} \right\}.$$

Pour calculer les valeurs critiques de tous les tests décrits précédemment, des versions multiplicateurs des processus  $\mathbb{K}_n$  et  $\mathcal{K}_n$  sont définies. D'abord, les versions multiplicateur de  $\mathcal{K}_n$  sont définies, pour  $h \in \{1, \dots, M\}$ , par

$$\mathcal{K}^{(h)}(w) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left\{ \left( \tilde{g}_j^{(h)} - 2 \right) \mathbf{1}(W_{j,n} \leq w) + \mathbf{1}(W_j^{(h)} \leq w) \right\},$$

où pour  $1 \leq j \leq n$ ,

$$W_j^{(h)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{g}_k^{(h)} \mathbf{1}(X_{1k} \leq X_{1j}, X_{2k} \leq X_{2j}).$$

Ensuite, les versions multiplicateur de  $\mathbb{K}_n$  basées sur l'équation (5.4) sont

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{(h)}(w) &= \mathcal{K}^{(h)}(w) - 4w \ln w \int_0^1 \mathcal{K}^{(h)}(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left\{ \left( \tilde{g}_j^{(h)} - 2 \right) \mathbf{1}(W_{j,n} \leq w) + \mathbf{1}(W_j^{(h)} \leq w) - 4L_j^{(h)} w \ln w \right\}, \end{aligned}$$

où

$$L_j^{(h)} = \int_0^1 \mathcal{K}^{(h)}(u) du = \left( \tilde{g}_j^{(h)} - 2 \right) W_{j,n} + W_j^{(h)}.$$

Ainsi, les versions multiplicateurs de  $S_n$  et  $T_n$  sont respectivement  $S^{(1)}, \dots, S^{(M)}$  et  $T^{(1)}, \dots, T^{(M)}$ , où

$$S^{(h)} = \int_0^1 \left\{ \mathbb{K}^{(h)}(w) \right\}^2 dw \quad \text{et} \quad T^{(h)} = \int_0^1 \left\{ \mathbb{K}^{(h)}(w) \right\}^2 dK_{\tau_n}(w).$$

De là, les valeurs critiques des tests basés sur  $S_n$  et  $T_n$  sont estimées par

$$p_S = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbf{1}(S^{(h)} > S_n) \quad \text{et} \quad p_T = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbf{1}(T^{(h)} > T_n).$$

Pour ce qui est de la statistique  $\xi_n^{p,q}$ , on remarque d'abord que

$$\xi_n^{p,q} = - \int_0^1 \mathcal{K}_n(w) dF_{p,q}(w).$$

Ainsi, les versions multiplicateur de  $\xi_n^{p,q}$  sont données par

$$\xi^{p,q,(h)} = - \int_0^1 \mathcal{K}_n^{(h)}(w) dF_{p,q}(w).$$

Quelques calculs permettent de montrer que

$$\xi^{p,q,(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left\{ \left( \tilde{g}_j^{(h)} - 2 \right) F_{p,q}(W_{j,n}) + F_{p,q}(W_j^{(h)}) \right\}.$$

L'auteur présente aussi deux autres statistiques de test basées sur des combinaisons de  $\xi_n^{p,q}$ ,  $p < q \in \mathbb{N}$ . Soit donc, pour  $K \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , le vecteur  $\xi_{n,K} = (\xi_n^{1,2}, \xi_n^{1,3}, \dots, \xi_n^{K-1,K})^\top$ , et considérons sa version standardisée  $\tilde{\xi}_{n,K} = \Sigma^{-1/2} \xi_{n,K}$ , où  $\Sigma$  est la matrice de variance-covariance de  $\xi_{n,K}$  dont la forme compliquée est donnée dans l'article. Il est ensuite remarqué que  $\tilde{\xi}_{n,K}$  tend vers une loi normale  $K(K-1)/2$ -dimensionnelle de moyenne nulle et de variance-covariance identitaire. Ainsi, en définissant l'ensemble

$$\mathcal{B}_K = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq p < q \leq K\},$$

et en choisissant  $B \subseteq \mathcal{B}_K$ , on pourrait définir des statistiques de la forme

$$V_n^B = \sum_{(p,q) \in B} \left( \tilde{\xi}_n^{p,q} \right)^2 \quad \text{et} \quad W_n^B = \max_{(p,q) \in B} \left| \tilde{\xi}_n^{p,q} \right|.$$

Il est montré que  $V_n^B \rightsquigarrow \chi_{|B|}^2$  et  $W_n^B \rightsquigarrow \{2\Phi(w) - 1\}^{|B|}$ ,  $w \geq 0$ , où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ces statistiques sont malheureusement inutilisables car  $\Sigma$  est inconnue. On peut cependant estimer les éléments de la matrice  $\Sigma$  par la matrice de variance-covariance empirique  $\hat{\Sigma}$  basée sur  $\xi_K^{(h)} = (\xi^{1,2,(h)}, \xi^{1,3,(h)}, \dots, \xi^{K-1,K,(h)})$ ,  $h \in \{1, \dots, M\}$ , et poser  $\hat{\xi}_K = \hat{\Sigma}^{-1/2} \xi_{n,K}$ . Les versions modifiées de  $V_n^B$  et  $W_n^B$  sont alors

$$\hat{V}^B = \sum_{(p,q) \in B} \left( \hat{\xi}_K^{p,q} \right)^2 \quad \text{et} \quad \hat{W}^B = \max_{(p,q) \in B} \left| \hat{\xi}_K^{p,q} \right|.$$



Il est montré que  $V_n^B$  et  $\widehat{V}^B$  se comportent de la même façon, asymptotiquement, de même que  $W_n^B$  et  $\widehat{W}^B$ .

## 5.5 Test de Kojadinovic & Yan (2010)

Kojadinovic & Yan (2010) proposent une statistique de test basée sur un processus qui compare la copule empirique  $C_n$  avec une estimation fondée sur une estimation  $\widehat{A}$  de la fonction de dépendance dans la représentation (4.11), à savoir  $C_{\widehat{A}}$ . Spécifiquement, la copule empirique est définie, pour  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ , par

$$C_n(u_1, u_2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1} \left( \widehat{U}_{j1} \leq u_1, \widehat{U}_{j2} \leq u_2 \right), \quad (5.5)$$

où  $(\widehat{U}_{11}, \widehat{U}_{12}), \dots, (\widehat{U}_{n1}, \widehat{U}_{n2})$  sont les pseudo-observations définies, pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , par

$$\left( \widehat{U}_{j1}, \widehat{U}_{j2} \right) = (F_{n1}(X_{1j}), F_{n2}(X_{2j})),$$

où pour  $\ell = 1, 2$ ,

$$F_{n\ell}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_{j\ell} \leq x).$$

Ensuite, pour estimer  $A$  de façon non-paramétrique, soient

$$\widehat{S}_{j\ell} = -\ln \left( \widehat{U}_{j\ell} \right),$$

où  $\ell = 1, 2$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Soient également  $\widehat{T}_j(0) = \widehat{S}_{j1}$ ,  $\widehat{T}_j(1) = \widehat{S}_{j2}$ , et pour  $x \in (0, 1)$ ,

$$\widehat{T}_j(x) = \min \left( \frac{\widehat{S}_{j1}}{1-x}, \frac{\widehat{S}_{j2}}{x} \right).$$

Un estimateur de  $A$  est donné par

$$\hat{A}(x) = \exp \left\{ -\gamma - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \hat{T}_j(x) \right\}, \quad x \in [0, 1],$$

où  $\gamma \approx 0,577$  est la constante d'Euler. Cet estimateur peut être exprimé en fonction de la copule empirique par

$$\hat{A}(t) = \exp \left[ -\gamma + \int_0^1 \{C_n(x^{1-t}, x^t) - \mathbf{1}(x > e^{-1})\} \frac{dx}{x \ln x} \right], \quad t \in [0, 1].$$

Cet estimateur est ensuite corrigé par les auteurs afin de respecter les contraintes de la fonction  $A$ ; ainsi, on utilise plutôt

$$\hat{A}_{\text{corr}}(t) = \exp \left\{ \ln \hat{A}(t) - (1-t) \ln \hat{A}(0) - t \ln \hat{A}(1) \right\}.$$

Kojadinovic & Yan (2010) proposent ensuite des statistiques de test basées sur le processus empirique

$$\mathbb{D}_n(u_1, u_2) = \sqrt{n} \{C_n(u_1, u_2) - C_{\hat{A}_{\text{corr}}}(u_1, u_2)\},$$

où  $C_n$  est la copule empirique définie en (5.5) et

$$C_{\hat{A}_{\text{corr}}}(u_1, u_2) = \exp \left\{ \ln uv \hat{A}_{\text{corr}} \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right) \right\}.$$

Spécifiquement, ils considèrent les fonctionnelles de Cramér-von Mises

$$\zeta_{n1} = \int_{[a,b]^2} \{\mathbb{D}_n(u_1, u_2)\}^2 du_1 du_2 \quad \text{et} \quad \zeta_{n2} = \int_{[a,b]^2} \{\mathbb{D}_n(u_1, u_2)\}^2 dC_n(u_1, u_2).$$

Pour calculer les valeurs critiques des tests basés sur ces statistiques, les auteurs utilisent des versions multiplicateur  $\mathbb{D}^{(1)}, \dots, \mathbb{D}^{(M)}$  de  $\mathbb{D}_n$ , et posent

$$\zeta_1^{(h)} = \int_{[a,b]^2} \{\mathbb{D}^{(h)}(u_1, u_2)\}^2 du_1 du_2$$

et

$$\zeta_2^{(h)} = \int_{[a,b]^2} \{\mathbb{D}^{(h)}(u_1, u_2)\}^2 dC_n(u_1, u_2).$$

## CHAPITRE 6

### SUR DE NOUVEAUX TESTS DE DÉPENDANCE EXTRÊME

#### 6.1 Fonction caractéristique de la transformation intégrale de probabilité

Dans un cadre général, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire a été définie à l'équation (2.1) du Chapitre 2. Cette notion sera maintenant utilisée pour développer de nouveaux tests statistiques pour les valeurs extrêmes bivariées. Ces tests seront des concurrents aux procédures proposées par Ghoudi et al. (1998), Ben Ghorbal et al. (2009), Kojadinovic & Yan (2010) et Quessy (2012) décrites au Chapitre 5.

Pour commencer, reprenons la variable aléatoire  $W = C_A(U_1, U_2)$ , où  $C_A \in \mathcal{VE}$  est une copule à valeurs extrêmes et  $(U_1, U_2) \sim C_A$ . On rappelle ici, tel que vu à l'équation (4.11), que

$$C_A(u_1, u_2) = \exp \left\{ \ln(u_1 u_2) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln u_1 u_2} \right) \right\},$$

où  $A$  est la fonction de dépendance extrême. On sait aussi, tel que mentionné à l'équation (4.13), que la fonction de répartition de  $W$  est de la forme

$$K_A(w) = w - (1 - \tau_A) w \ln w,$$

où  $\tau_A$  est le tau de Kendall associé à  $C_A$ . Plutôt que de travailler avec la caractérisation de la loi de  $W$  via  $K_A$ , à la manière de Quessy (2012), on pourrait considérer sa fonction caractéristique, à savoir

$$\psi_A(t) = \mathbb{E}(e^{itW}) = \int_0^1 e^{itw} dK_A(w). \quad (6.1)$$

À noter qu'il est facile de montrer que

$$dK_A(w) = \tau_A - (1 - \tau_A) \ln w,$$

ce qui fait que

$$\psi_A(t) = \tau_A \int_0^1 e^{itw} dw - (1 - \tau_A) \int_0^1 e^{itw} \ln w dw.$$

Puisque  $\psi_A$  ne dépend en fait que de  $\tau_A$ , et non de la fonction  $A$  à proprement parler, on notera plutôt  $\psi_{\tau_A}$  dans la suite.

## 6.2 Une fonction caractéristique empirique semi-paramétrique

La version empirique de  $\psi_{\tau_A}(t)$  fait appel à des *pseudo-observations*, puisque la variable aléatoire  $W$  n'est pas directement observable. En effet,  $W =$

$C_A(U_1, U_2)$  et  $C_A$  est inconnue. En se basant sur les observations  $(X_{11}, X_{12}), \dots, (X_{n1}, X_{n2})$ , on définit des *pseudo-copies* de  $W$  par  $W_{1,n}, \dots, W_{n,n}$ , où

$$W_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(X_{k1} \leq X_{j1}, X_{k2} \leq X_{j2}).$$

La version empirique de la fonction caractéristique sera alors

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itW_{j,n}}.$$

On définit ensuite, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le processus empirique

$$\Psi_n(t) = \sqrt{n} \{ \psi_n(t) - \psi_{\tau_n}(t) \},$$

où  $\tau_n$  est la version empirique du tau de Kendall. En se référant aux travaux de Genest & Rivest (1993) et Barbe et al. (1996), on sait que

$$\tau_n = -1 + \frac{4}{n} \sum_{j=1}^n W_{j,n}.$$

Afin d'obtenir la convergence faible du processus  $\Psi_n$  sur l'espace  $\mathbb{R}$  au complet, notons d'abord que

$$\psi_n(t) = \int_0^1 e^{itw} dK_n(w),$$

où

$$K_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(W_{j,n} \leq w)$$

est la fonction de répartition de  $W_{1,n}, \dots, W_{j,n}$ . Ainsi, en utilisant l'équation précédente ainsi que l'équation (6.1), on obtient

$$\Psi_n(t) = \sqrt{n} \int_0^1 e^{itw} \{ dK_n(w) - dK_{\tau_n}(w) \} = \int_0^1 e^{itw} d\mathbb{K}_n(w),$$

où

$$\mathbb{K}_n(w) = \sqrt{n} \{K_n(w) - K_{\tau_n}(w)\}.$$

On voit alors que le processus  $\Psi_n$  s'écrit comme une fonctionnelle appliquée au processus  $\mathbb{K}_n$ . Ce processus empirique, de même qu'une formulation plus générale de celui-ci, ont été étudiés par Genest et al. (2006). Il s'agit, en fait, d'une version du *processus de Kendall* étudié par Barbe et al. (1996) dans lequel un paramètre doit être estimé (dans le cas présent, le paramètre inconnu est  $\tau$ ). Genest et al. (2006) ont obtenu la convergence faible du processus  $\mathbb{K}_n$  sous plusieurs familles de copules, y compris la famille des copules à valeurs extrêmes. Ce résultat est rappelé ici.

**Proposition 6.1.** *Sous l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  d'une copule extrême, on a la convergence  $\mathbb{K}_n \rightsquigarrow \mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K}$  est un processus Gaussien centré défini sur  $[0, 1]$  dont la fonction de covariance  $\Gamma_{\mathbb{K}}(s, t) = \mathbb{E} \{ \mathbb{K}(s) \mathbb{K}(t) \}$  dépend de la fonction de dépendance extrême  $A$ .*

À remarquer que la fonction de covariance  $\Gamma_{\mathbb{K}}$  a une forme extrêmement compliquée en général. Le résultat asymptotique énoncé à la Proposition 6.1 permet d'obtenir une conclusion similaire pour le processus  $\Psi_n$ . Pour ce faire, on note d'abord que par un simple changement de variable et une intégration par partie, on peut écrire

$$\Psi_n(t) = -it \int_0^1 e^{itw} \mathbb{K}_n(w) dw. \quad (6.2)$$

Étant donné que  $\Psi_n$  est une fonctionnelle de  $\mathbb{K}_n$ , on s'attend à la convergence en loi de  $\Psi_n$  comme conséquence de celle de  $\mathbb{K}_n$ . C'est justement l'objet

de la proposition suivante. La preuve, qui est basée sur le théorème des fonctionnelles continues (*continuous mapping theorem*), est omise.

**Proposition 6.2.** *Sous l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  d'une copule extrême,*

$$\Psi_n(t) \rightsquigarrow \Psi(t) = -it \int_0^1 e^{itw} \mathbb{K}(w) dw,$$

où  $\Psi$  est un processus Gaussien défini dans le plan complexe tel que

$$\mathbb{E} \{ \Psi(s) \Psi(t) \} = -st \int_0^1 \int_0^1 e^{isw_1} e^{itw_2} \Gamma_{\mathbb{K}}(w_1, w_2) dw_1 dw_2$$

dépend de la fonction de dépendance extrême  $A$ .

À l'instar de la fonction  $\Gamma_{\mathbb{K}}$ , la fonction de covariance de la Proposition 6.2 n'admet pas d'expression explicite en général. En utilisant le fait que

$$-ite^{itw} = t \sin(tw) - it \cos(tw),$$

la limite du processus  $\Psi_n$  peut s'écrire

$$\Psi(t) = t \int_0^1 \sin(tw) \mathbb{K}(w) dw - it \int_0^1 \cos(tw) \mathbb{K}(w) dw.$$

Les parties réelle et imaginaire de  $\Psi$  sont donc respectivement

$$\Re \{ \Psi(t) \} = t \int_0^1 \sin(tw) \mathbb{K}(w) dw \quad \text{et} \quad \Im \{ \Psi(t) \} = -t \int_0^1 \cos(tw) \mathbb{K}(w) dw.$$

### 6.3 Statistiques de test

Sous l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$ , la copule sous-jacente aux observations appartient à la famille des modèles extrêmes. Dans ce cas, on aura la convergence

presque sûre  $\psi_n \rightarrow \psi_{\tau_A}$  pour un certain  $\tau_A \in [0, 1]$ . Dans le cas où  $\mathcal{H}_0$  est fausse,  $\psi_n$  convergera plutôt vers une fonction caractéristique qui n'est pas de la forme (6.1) qui caractérise la loi de  $W$  sous une copule extrême. Ainsi, puisque  $\psi_n$  et  $\psi_{\tau_n}$  devraient être *près* l'une de l'autre sous  $\mathcal{H}_0$  et *éloignées* sous  $\mathcal{H}_1$ , une idée naturelle de statistique de test consiste à mesurer la distance entre ces deux fonctions. Une possibilité est d'utiliser la fonctionnelle de Cramér–von Mises, c'est-à-dire

$$S_n^{\mathcal{G}} = n \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(t) - \psi_{\tau_n}(t)|^2 d\mathcal{G}(t), \quad (6.3)$$

où  $|\cdot|$  est le module d'un nombre complexe, c'est-à-dire que  $|a+bi|^2 = a^2+b^2$ . Ici,  $d\mathcal{G}$  est une fonction de poids. Tant que  $d\mathcal{G}$  est telle que

$$\int_{\mathbb{R}} [\Re \{\psi_W(t) - \psi_{\tau}(t)\}]^2 d\mathcal{G}(t) > 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} [\Im \{\psi_W(t) - \psi_{\tau}(t)\}]^2 d\mathcal{G}(t) > 0$$

sous une hypothèse alternative, alors le test basé sur  $S_n^{\mathcal{G}}$  sera convergent.

Le comportement asymptotique de  $S_n^{\mathcal{G}}$  se déduit de celui du processus empirique  $\Psi_n$ . En effet, on voit facilement de la définition (6.3) que

$$S_n^{\mathcal{G}} = \int_{\mathbb{R}} |\Psi_n(t)|^2 d\mathcal{G}(t). \quad (6.4)$$

Par conséquent, une application du Théorème des applications continues (*Continuous mapping Theorem*) permet de conclure que

$$S_n^{\mathcal{G}} \rightsquigarrow S^{\mathcal{G}} = \int_{\mathbb{R}} |\Psi(t)|^2 d\mathcal{G}(t),$$

où  $\Psi$  est la limite en loi du processus  $\Psi_n$ .

Afin d'obtenir une formule explicite pour le calcul de  $S_n^{\mathcal{G}}$ , écrivons d'abord

$$\psi_{\tau_n}(t) = E(e^{itW}), \quad \text{où } W \sim K_{\tau_n}.$$



Les calculs subséquents seront grandement facilités en utilisant une approximation de la fonction  $\psi_{\tau_n}$ . Spécifiquement, on simulera un échantillon *artificiel*, noté  $\widetilde{W}_{1,n}, \dots, \widetilde{W}_{N,n}$ , de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $K_{\tau_n}$ . Ainsi, si  $N$  est suffisamment grand, une bonne approximation de  $\psi_{\tau_n}$  sera donnée par

$$\psi_{N,n}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{it\widetilde{W}_{j,n}}.$$

**Remarque 6.1.** *On simulera des observations de loi  $K_\tau$  par la méthode du rejet. À cette fin, soit la densité  $g(w) = 1/2\sqrt{w}$  définie sur  $[0, 1]$ . On a*

$$\sup_{w \in [0,1]} \frac{dK_\tau(w)}{g(w)} = \sup_{w \in [0,1]} 2\sqrt{w} \{\tau - (1 - \tau) \log w\} \leq 2 = L.$$

*L'algorithme du rejet consiste à*

- (i) *générer une variable aléatoire  $Y$  de densité  $g$  et une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ ;*
- (ii) *refaire l'étape (i) tant que  $U > \frac{dK_\tau(Y)}{L \times g(Y)} = \sqrt{Y} \{\tau - (1 - \tau) \log Y\}$ ;*
- (iii) *poser  $W = Y$ , où  $Y$  est tel que  $U \leq \sqrt{Y} \{\tau - (1 - \tau) \log Y\}$ .*

*On peut montrer que  $W \sim K_\tau$ .*

Une version légèrement modifiée de  $\Psi_n$  basée sur l'approximation de  $\psi_{\tau_n}$  est alors donnée par

$$\Psi'_n(t) = \sqrt{n} \{\psi_n(t) - \psi_{N,n}(t)\}.$$

Une autre façon de l'écrire est

$$\Psi'_n(t) = \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itW_{j,n}} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{it\widetilde{W}_{j,n}} \right).$$

Ensuite, puisque  $e^{itw} = \cos(tw) + i \sin(tw)$ , on a

$$\begin{aligned}\Psi'_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \{ \cos(tW_{j,n}) + i \sin(tW_{j,n}) \} \\ &\quad - \frac{\sqrt{n}}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ \cos(t\widetilde{W}_{j,n}) + i \sin(t\widetilde{W}_{j,n}) \right\}.\end{aligned}$$

En considérant les parties réelle et imaginaire séparément, on a

$$\begin{aligned}\Psi'_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \cos(tW_{j,n}) - \frac{\sqrt{n}}{N} \sum_{j=1}^N \cos(t\widetilde{W}_{j,n}) \\ &\quad + i \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \sin(tW_{j,n}) - \frac{\sqrt{n}}{N} \sum_{j=1}^N \sin(t\widetilde{W}_{j,n}) \right\}.\end{aligned}$$

De là, on montre après quelques calculs directs que le module au carré de  $\Psi'_n$  peut s'exprimer par

$$\begin{aligned}|\Psi'_n(t)|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \{ \cos(tW_{j,n}) \cos(tW_{k,n}) + \sin(tW_{j,n}) \sin(tW_{k,n}) \} \\ &\quad - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left\{ \cos(tW_{j,n}) \cos(t\widetilde{W}_{k,n}) + \sin(tW_{j,n}) \sin(t\widetilde{W}_{k,n}) \right\} \\ &\quad + \frac{n}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left\{ \cos(t\widetilde{W}_{j,n}) \cos(t\widetilde{W}_{k,n}) + \sin(t\widetilde{W}_{j,n}) \sin(t\widetilde{W}_{k,n}) \right\}.\end{aligned}$$

En employant l'identité trigonométrique  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$ , cette expression se simplifie à

$$\begin{aligned}|\Psi'_n(t)|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \cos \{ t (W_{j,n} - W_{k,n}) \} \\ &\quad - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \cos \left\{ t (W_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n}) \right\} \\ &\quad + \frac{n}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \cos \left\{ t (\widetilde{W}_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n}) \right\}.\end{aligned}$$

Maintenant, soit

$$\beta^{\mathcal{G}}(a) = \int_{\mathbb{R}} \cos(ta) d\mathcal{G}(t).$$

Avec cette notation, la statistique de test s'écrit

$$\begin{aligned} S_n^{\mathcal{G}} = \int_{\mathbb{R}} |\Psi'_n(t)|^2 d\mathcal{G}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta^{\mathcal{G}}(W_{j,n} - W_{k,n}) \\ &\quad - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \beta^{\mathcal{G}}(W_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n}) \\ &\quad + \frac{n}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta^{\mathcal{G}}(\widetilde{W}_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n}). \end{aligned}$$

Cette expression est similaire à la formule obtenue par Quessy & Éthier (2012) dans un contexte de comparaisons de lois univariées.

Parmi les choix possibles pour la fonction de poids  $d\mathcal{G}(t)$ , on considérera

$$d\mathcal{G}(t) = e^{-\kappa t^2}, \quad \text{où } \kappa > 0. \quad (6.5)$$

Dans ce cas,

$$\beta^{\mathcal{G}}(a) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\kappa}\right).$$

Pour la fonction de poids de l'équation (6.5), la statistique de test s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} S_n^{\mathcal{G}} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\left\{-\frac{(W_{j,n} - W_{k,n})^2}{4\kappa}\right\} \\ &\quad - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \exp\left\{-\frac{(W_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n})^2}{4\kappa}\right\} \\ &\quad + \frac{n}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \exp\left\{-\frac{(\widetilde{W}_{j,n} - \widetilde{W}_{k,n})^2}{4\kappa}\right\}. \end{aligned}$$

Les figures 6.1–6.3 présente les histogrammes de 1 000 réalisations de cette statistique pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule extrême de Gumbel–Hougaard.

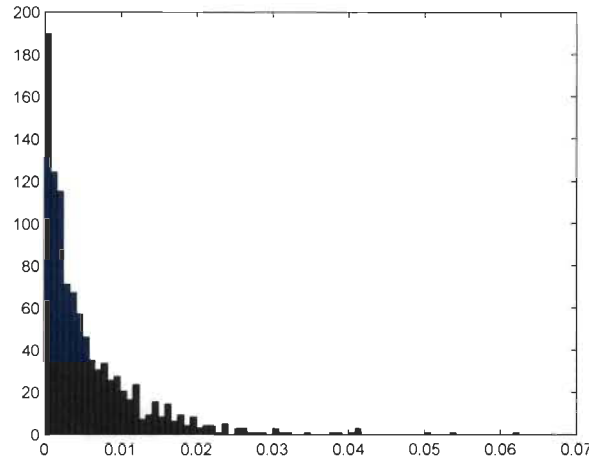


Figure 6.1: Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^G$  avec  $dG(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,25$

## 6.4 Versions multiplicateurs du processus $\Psi_n$

Le but de cette sous-section est d'*imiter* le comportement asymptotique du processus  $\Psi_n$ . De cette façon, on pourra obtenir des *copies* de la statistique de test  $S_n^G$ , et par le fait même une valeur critique nécessaire pour faire le test. La méthode proposée est basée sur le très puissant Théorème central

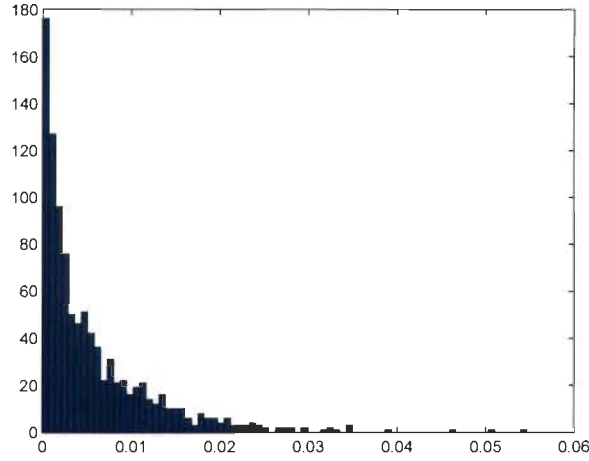


Figure 6.2: Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^G$  avec  $d\mathcal{G}(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,50$

limite du multiplicateur. Pour décrire notre méthodologie, posons d'abord

$$A_n(t) = \sqrt{n} \{ \psi_n(t) - \psi_\tau(t) \} \quad \text{et} \quad B_n(t) = \sqrt{n} \{ \psi_{\tau_n}(t) - \psi_\tau(t) \}.$$

Avec cette notation,  $\Psi_n(t) = A_n(t) - B_n(t)$ . Dans la suite, on obtiendra séparément des versions multiplicateurs de  $A_n$  et de  $B_n$ .

#### 6.4.1 Processus $A_n$

On note premièrement que  $A_n = A_{n1} + A_{n2}$ , où

$$A_{n1}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \{ e^{itW_j} - \psi_\tau(t) \} \quad \text{et} \quad A_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (e^{itW_{j,n}} - e^{itW_j}),$$

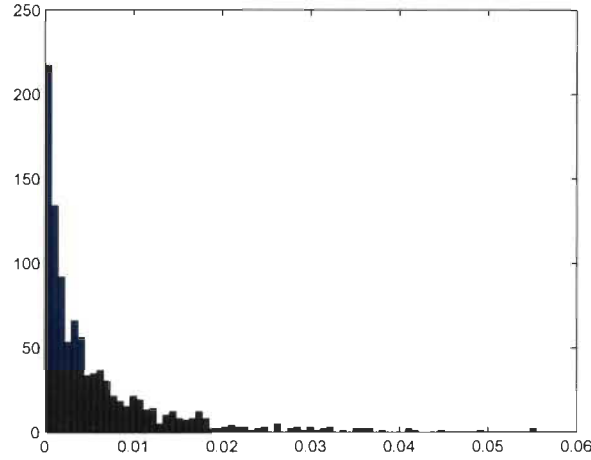


Figure 6.3: Histogramme de 1 000 réalisations de la statistique  $S_n^{\mathcal{G}}$  avec  $d\mathcal{G}(t) = e^{-t^2}$  pour des échantillons de taille  $n = 100$  tirés de la copule de Gumbel–Hougaard lorsque  $\tau = 0,75$

avec  $W_{j,n} = H_n(X_{j1}, X_{j2})$  et  $W_j = H(X_{j1}, X_{j2})$ . Par la méthode du multiplicateur *classique* décrite par exemple dans les ouvrages de Kosorok (2008) et de van der Vaart & Wellner (1996), la version multiplicateur de  $A_{n1}$  est

$$A_{n1}^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left( \frac{g_j^{(h)}}{\bar{g}^{(h)}} - 1 \right) e^{itW_{j,n}},$$

où pour chaque  $h \in \{1, \dots, M\}$ ,  $g_1^{(h)}, \dots, g_n^{(h)}$  sont des variables aléatoires indépendantes et positives telles que

$$\mathbb{E} \left( g_j^{(h)} \right) = \text{var} \left( g_j^{(h)} \right) = 1.$$

Pour faciliter la notation, on posera dans la suite

$$\xi_j^{(h)} = \frac{g_j^{(h)}}{\bar{g}^{(h)}} - 1.$$

Ainsi, on écrira désormais

$$A_{n1}^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} e^{itW_{j,n}}.$$

Pour ce qui est du processus  $A_{n2}$ , on a

$$A_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \{e^{itH_n(X_{j1}, X_{j2})} - e^{itH(X_{j1}, X_{j2})}\}. \quad (6.6)$$

En posant  $\mathbb{H}_n = \sqrt{n}(H_n - H)$ , on a

$$e^{itH_n(x,y)} - e^{itH(x,y)} \approx it e^{itH(x,y)} \frac{\mathbb{H}_n(x,y)}{\sqrt{n}}. \quad (6.7)$$

À noter que la version multiplicateur de  $\mathbb{H}_n$  (voir Kosorok, 2008) est

$$\mathbb{H}_n^{(h)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k^{(h)} \mathbf{1}(X_{k1} \leq x, X_{k2} \leq y).$$

Ainsi, à partir de la représentation (6.6) du processus  $A_{n2}$  et de l'approximation (6.7), on propose que la version multiplicateur de  $A_{n2}$  soit

$$\begin{aligned} A_{n2}^{(h)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n it e^{itW_{j,n}} \frac{\mathbb{H}_n^{(h)}(X_{j1}, X_{j2})}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k^{(h)} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n it e^{itW_{j,n}} \mathbf{1}(X_{j1} \geq X_{k1}, X_{j2} \geq X_{k2}) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n it e^{itW_{k,n}} R_{jk} \right), \end{aligned}$$

où  $R_{jk} = \mathbf{1}(X_{j1} \leq X_{k1}, X_{j2} \leq X_{k2})$ . Par conséquent, on propose que la version multiplicateur de  $A_n$  soit donnée par

$$\begin{aligned} A_n^{(h)}(t) &= A_{n1}^{(h)}(t) + A_{n2}^{(h)}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} \left( e^{itW_{j,n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n it e^{itW_{k,n}} R_{jk} \right). \end{aligned}$$

On pourrait démontrer que

$$(A_n, A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(M)}) \rightsquigarrow (A, A^{(1)}, \dots, A^{(M)}),$$

où  $A^{(1)}, \dots, A^{(M)}$  sont des copies indépendantes de la limite  $A$  de  $A_n$ .

### 6.4.2 Processus $B_n$

Pour ce qui est du processus  $B_n = \sqrt{n}(\psi_{\tau_n} - \psi_\tau)$ , on remarque d'abord qu'une approximation de Taylor d'ordre un autour de  $\tau$  permet d'écrire

$$\psi_{\tau_n}(t) \approx \psi_\tau(t) + \dot{\psi}_\tau(t)(\tau_n - \tau),$$

où  $\dot{\psi}_\tau(t) = \partial\psi_\tau(t)/\partial\tau$ . En invoquant le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir Royden, 1988, par exemple), on obtient

$$\dot{\psi}_\tau(t) = \int_0^1 e^{itw} \frac{\partial}{\partial\tau} dK_\tau(w) = \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw.$$

Par conséquent, on peut conclure que

$$B_n(t) = \left( \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \right) \sqrt{n}(\tau_n - \tau) + o_P(1).$$

À partir des travaux de Quessy et al. (2012), des versions multiplicateurs pour  $\mathcal{T}_n = \sqrt{n}(\tau_n - \tau)$  sont données par

$$\mathcal{T}_n^{(h)} = \frac{4}{n^{3/2}} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} (R_{jk} + R_{kj}).$$



De là,

$$\begin{aligned}
B_n^{(h)}(t) &= \left( \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \right) \mathcal{T}_n^{(h)} \\
&= \left( \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \right) \frac{4}{n^{3/2}} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} (R_{jk} + R_{kj}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} \left\{ \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \right\}.
\end{aligned}$$

### 6.4.3 Processus $\Psi_n$

Comme  $\Psi_n = A_n - B_n$ , les versions multiplicateurs de  $\Psi_n$  proposées sont

$$\begin{aligned}
\Psi_n^{(h)}(t) &= A_n^{(h)}(t) - B_n^{(h)}(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{(h)} \left\{ e^{itW_{j,n}} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n it e^{itW_{\ell,n}} R_{j\ell} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \right\} \quad (6.8)
\end{aligned}$$

## 6.5 Versions multiplicateurs de la statistique de test

En regard de la définition de la statistique de test  $S_n^{\mathcal{G}}$  donnée à l'équation (6.4), des versions multiplicateurs naturelles sont

$$S_n^{\mathcal{G},(h)} = \int_{\mathbb{R}} |\Psi_n^{(h)}(t)|^2 d\mathcal{G}(t), \quad h \in \{1, \dots, M\},$$

où les processus  $\Psi_n^{(1)}, \dots, \Psi_n^{(M)}$  sont définis à l'équation (6.8).

Afin d'obtenir une formule explicite pour  $S_n^{\mathcal{G},(h)}$ , on remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
e^{itW_{j,n}} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n it e^{itW_{\ell,n}} R_{j\ell} - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 e^{itw} (1 + \ln w) dw \\
= \cos(tW_{j,n}) + i \sin(tW_{j,n}) \\
- \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \sin(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} + i \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \cos(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} \\
- \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \cos(tw) (1 + \ln w) dw \\
- i \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \sin(tw) (1 + \ln w) dw.
\end{aligned}$$

Les parties réelle et imaginaire de cette dernière expression sont donc données respectivement par

$$\cos(tW_{j,n}) - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \sin(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \cos(tw) (1 + \ln w) dw$$

et

$$\sin(tW_{j,n}) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \cos(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \sin(tw) (1 + \ln w) dw.$$

Notons maintenant

$$\Psi_{\Re}^{(h)}(t) = \Re \{ \Psi_n^{(h)}(t) \} \quad \text{et} \quad \Psi_{\Im}^{(h)}(t) = \Im \{ \Psi_n^{(h)}(t) \}$$

les parties réelle et imaginaire de  $\Psi_n^{(h)}$ . On a donc

$$|\Psi_n^{(h)}(t)|^2 = \left\{ \Psi_{\Re}^{(h)}(t) \right\}^2 + \left\{ \Psi_{\Im}^{(h)}(t) \right\}^2,$$

où

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Psi_{\mathfrak{R}}^{(h)}(t) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} \xi_k^{(h)} \left\{ \cos(tW_{j,n}) - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \sin(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \cos(tw)(1 + \ln w) dw \right\} \\
&\quad \times \left\{ \cos(tW_{k,n}) - \frac{1}{n} \sum_{\ell'=1}^n t \sin(tW_{\ell',n}) R_{k\ell'} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{n} \sum_{\ell'=1}^n (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) \int_0^1 \cos(tw')(1 + \ln w') dw' \right\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Psi_{\mathfrak{S}}^{(h)}(t) \right\}^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} \xi_k^{(h)} \left\{ \sin(tW_{j,n}) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n t \cos(tW_{\ell,n}) R_{j\ell} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \sin(tw)(1 + \ln w) dw \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sin(tW_{k,n}) + \frac{1}{n} \sum_{\ell'=1}^n t \cos(tW_{\ell',n}) R_{k\ell'} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{n} \sum_{\ell'=1}^n (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) \int_0^1 \sin(tw')(1 + \ln w') dw' \right\}.
\end{aligned}$$

En effectuant les multiplications à l'intérieur des accolades de ces deux dernières expressions, et en faisant ensuite la somme  $\{\Psi_{\mathfrak{R}}^{(h)}(t)\}^2 + \{\Psi_{\mathfrak{S}}^{(h)}(t)\}^2$ , on retrouve des expressions de la forme  $\cos x \cos y + \sin x \sin y$  et  $\sin x \cos y - \cos x \sin y$ . En utilisant les identités trigonométriques  $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$  et  $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)$ , on parvient à montrer que

$$\begin{aligned}
|\Psi_n^{(h)}(t)|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} \xi_k^{(h)} \\
&\times \left\{ \cos \{t(W_{j,n} - W_{k,n})\} + \frac{1}{n} \sum_{\ell'=1}^n R_{k\ell'} t \sin \{t(W_{j,n} - W_{\ell',n})\} \right. \\
&\quad - \frac{4}{n} \sum_{\ell'=1}^n (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) \int_0^1 \cos \{t(W_{j,n} - w)\} (1 + \ln w) dw \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n R_{j\ell} t \sin \{t(W_{k,n} - W_{\ell,n})\} \\
&\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{\ell,\ell'=1}^n R_{j\ell} R_{k\ell'} t^2 \cos \{t(W_{\ell,n} - W_{\ell',n})\} \\
&\quad + \frac{4}{n^2} \sum_{\ell,\ell'=1}^n (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) R_{j\ell} \int_0^1 t \sin \{t(W_{\ell,n} - w)\} (1 + \ln w) dw \\
&\quad - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \cos \{t(W_{k,n} - w)\} (1 + \ln w) dw \\
&\quad + \frac{4}{n^2} \sum_{\ell,\ell'=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) R_{k\ell'} \int_0^1 t \sin \{t(W_{\ell',n} - w)\} (1 + \ln w) dw \\
&\quad \left. + \frac{16}{n^2} \sum_{\ell,\ell'=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^1 \int_0^1 \cos \{t(w - w')\} (1 + \ln w) (1 + \ln w') dw dw' \right\}.
\end{aligned}$$

Soient maintenant les fonctions

$$\begin{aligned}
\beta_1(a) &= \int_{\mathbb{R}} \cos(ta) d\mathcal{G}(t), \\
\beta_2(a) &= \int_{\mathbb{R}} t \sin(ta) d\mathcal{G}(t), \\
\beta_3(a) &= \int_{\mathbb{R}} t^2 \cos(ta) d\mathcal{G}(t).
\end{aligned}$$

En définissant la matrice  $\mathbb{V}^{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dont les éléments sont

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{jk}^{\mathcal{G}} = & \beta_1(W_{j,n} - W_{k,n}) \\
& + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n R_{k\ell} \beta_2(W_{j,n} - W_{\ell,n}) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n R_{j\ell} \beta_2(W_{k,n} - W_{\ell,n}) \\
& - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{k\ell} + R_{\ell k}) \int_0^1 \beta_1(W_{j,n} - w) (1 + \ln w) dw \\
& - \frac{4}{n} \sum_{\ell=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) \int_0^1 \beta_1(W_{k,n} - w) (1 + \ln w) dw \\
& + \frac{1}{n^2} \sum_{\ell, \ell'=1}^n R_{j\ell} R_{k\ell'} \beta_3(W_{\ell,n} - W_{\ell',n}) \\
& + \frac{4}{n^2} \sum_{\ell, \ell'=1}^n (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) R_{j\ell} \int_0^1 \beta_2(W_{\ell,n} - w) (1 + \ln w) dw \\
& + \frac{4}{n^2} \sum_{\ell, \ell'=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) R_{k\ell'} \int_0^1 \beta_2(W_{\ell',n} - w) (1 + \ln w) dw \\
& + \frac{16}{n^2} \sum_{\ell, \ell'=1}^n (R_{j\ell} + R_{\ell j}) (R_{k\ell'} + R_{\ell'k}) \\
& \quad \times \int_0^1 \int_0^1 \beta_1(w - w') (1 + \ln w) (1 + \ln w') dw dw',
\end{aligned}$$

on a

$$S_n^{\mathcal{G},(h)} = \int_{\mathbb{R}} |\Psi_n^{(h)}(t)|^2 d\mathcal{G}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \xi_j^{(h)} \xi_k^{(h)} \mathbb{V}_{jk}^{\mathcal{G}}.$$

Enfin, si on définit le vecteur

$$\boldsymbol{\xi}^{(h)} = \left( \xi_1^{(h)}, \dots, \xi_n^{(h)} \right)^{\top},$$

on obtient la représentation matricielle

$$S_n^{\mathcal{G},(h)} = \frac{1}{n} \left( \boldsymbol{\xi}^{(h)} \right)^{\top} \mathbb{V}^{\mathcal{G}} \boldsymbol{\xi}^{(h)}.$$

Cette formule compacte est facile à implémenter, notamment dans Matlab. De plus, il est à noter que la matrice  $\mathbb{V}^{\mathcal{G}}$  dépend uniquement de l'échantillon. Ceci rend aisée l'obtention d'un grand nombre de copies  $S_n^{\mathcal{G},(1)}, \dots, S_n^{\mathcal{G},(M)}$  de la statistique de test sous  $\mathcal{H}_0$ . À partir de ces répliques de la statistique de test, la valeur critique s'obtient par

$$\widehat{p}^{\mathcal{G}} = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbf{1} \left( S_n^{\mathcal{G},(h)} > S_n^{\mathcal{G}} \right).$$

On rejette alors l'hypothèse nulle d'une copule extrême bivariée si  $\widehat{p}^{\mathcal{G}} < \alpha$ , où  $\alpha \in (0, 1)$  est le seuil de signification du test. On prend souvent  $\alpha = 0,05$ .

**Remarque 6.2.** Si la fonction de poids est  $d\mathcal{G}(t) = e^{-\kappa t^2}$ , alors

$$\begin{aligned} \beta_1(a) &= \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} e^{-a^2/4\kappa}, \\ \beta_2(a) &= \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \frac{1}{2\kappa} a e^{-a^2/4\kappa}, \\ \beta_3(a) &= \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left( \frac{2\kappa - a^2}{4\kappa^2} \right) e^{-a^2/4\kappa}. \end{aligned}$$

## 6.6 Étude de l'efficacité des tests

### 6.6.1 Paramètres de la simulation

Dans un premier temps, on va étudier la capacité des tests à conserver leur seuil nominal de  $\alpha = 0.05$  sous la copule extrême de Gumbel–Hougaard. Ensuite, la puissance des tests, c'est-à-dire la probabilité qu'ils ont à rejeter l'hypothèse nulle lorsqu'elle est fausse sera évaluée sous les modèles de Clayton, Frank et Normale. Ces estimations de probabilité seront basées sur

1 000 répétitions. Dans la suite, on écrira  $S_n^\kappa$  pour référer à la statistique de test construite avec la fonction de poids  $d\mathcal{G}(t) = e^{-\kappa t^2}$ . Dans les études de simulation qui suivent, on comparera  $S_n^{0.5}$ ,  $S_n^1$ ,  $S_n^{2.5}$ ,  $S_n^5$  et  $S_n^1$ . Les tailles d'échantillons considérées dans notre étude sont  $n = 50, 100, 200$ . Pour le calcul des valeurs critiques, on utilisera  $M = 1\,000$  échantillons multiplicateur. Enfin, l'approximation de la fonction  $\Psi_{\tau_n}$  se fera avec  $N = 1\,000$ .

### 6.6.2 Aptitude à conserver le seuil nominal

On déduit de l'Exemple 4.6 que la copule extrême de Gumbel–Hougaard dans le cas  $d = 2$  est de la forme

$$C_\theta(u, v) = \exp \left[ - \left\{ (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right\}^{1/\theta} \right], \quad (6.9)$$

où  $\theta \in [0, 1]$ . En simulant des observations de cette copule, on peut ainsi évaluer la capacité des tests à conserver leur seuil nominal de 5% sous l'hypothèse nulle. Les résultats obtenus sont présentés au Tableau 6.1. En général, les test conservent assez bien leur seuil de 5%, sauf peut-être pour les statistiques  $S_n^{0.5}$  et  $S_n^1$  quand  $n = 50$ . Les tests ont généralement un peu plus de problèmes lorsque  $\tau = 1/4$ , bien que ce ne soit pas dramatique pour  $n = 200$ . En résumé, les statistiques  $S_n^{2.5}$ ,  $S_n^5$  et  $S_n^1$  tiennent très bien leur seuil et ce, peu importe la taille de l'échantillon.

### 6.6.3 Puissance sous la copule de Clayton

Le générateur de cette copule Archimédienne a été présenté à l'équation (4.5).

La copule associée est

$$C(\mathbf{u}) = \left( \sum_{j=1}^d u_j^{-\theta} - d + 1 \right)^{-1/\theta}.$$

Quand  $d = 2$ , on a

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Les résultats pour ce modèle se retrouvent au Tableau 6.2. Ici, on souhaite que la probabilité de rejet soit la plus élevée possible, car la copule de Clayton ne fait pas partie de la famille extrême. D'emblée, on remarque que la statistique  $S_n^{.05}$  performe mieux que les autres; elle est suivie de très près par  $S_n^1$ . Par contre,  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^5$  et  $S_n^1$  sont nettement moins puissantes. Tel qu'attendu, les puissances des statistiques augmentent à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Également, on remarque que pour une taille donnée, la puissance est généralement la plus élevée lorsque  $\tau = 1/2$ .

### 6.6.4 Puissance sous la copule de Frank

Le générateur de cette copule Archimédienne a été présenté à l'équation (4.7).

La copule associée est

$$C(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - e^{-\theta})^{d-1}} \prod_{j=1}^d (1 - e^{-\theta u_j}) \right\}.$$



Quand  $d = 2$ ,

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{(1 - e^{-\theta})} \right\}.$$

Les résultats, assez semblables à ceux obtenus pour la copule de Clayton, se trouvent au Tableau 6.3. En effet, les statistiques  $S_n^{.05}$  et  $S_n^{.1}$  performant mieux que les autres. Par contre, les puissances sont nettement inférieures à celles obtenues sous le modèle de Clayton. Cette observation est en accord avec les résultats de simulation de Quessy (2012). L'influence du paramètre  $\tau$  n'est pas très marquée, surtout pour les statistiques  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^{.5}$  et  $S_n^1$ .

### 6.6.5 Puissance sous la copule Normale

Cette copule a été présentée à l'équation (4.4). Les résultats de simulations sous ce modèle sont dans le Tableau 6.4. Ici,  $S_n^{.05}$  et  $S_n^{.1}$  démontrent une meilleure puissance que leurs concurrentes. On constate également que la puissance augmente avec la taille de l'échantillon, mais de façon beaucoup moins marqué que pour les copules Clayton et Frank. De plus, on constate que la puissance est inversement proportionnelle à la valeur de  $\tau$ .

Tableau 6.1: Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Gumbel-Hougaard pour les tests basés sur  $S_n^{.05}$ ,  $S_n^{.1}$ ,  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^{.5}$  et  $S_n^1$  avec  $M = 1\,000$  échantillons multiplicateurs.

$n$	$\tau$	$S_n^{.05}$	$S_n^{.1}$	$S_n^{.25}$	$S_n^{.5}$	$S_n^1$
50	1/4	13.0	10.1	8.5	8.7	7.6
	1/2	7.8	8.3	7.1	5.3	5.1
	3/4	6.1	6.0	4.8	5.5	6.0
100	1/4	9.1	6.8	7.0	5.1	4.4
	1/2	7.6	5.9	5.4	5.9	5.1
	3/4	5.3	5.6	5.8	6.1	6.1
200	1/4	10.7	7.6	8.3	7.0	6.1
	1/2	6.5	5.3	5.0	6.1	4.9
	3/4	6.7	5.3	7.0	5.2	5.7

Tableau 6.2: Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Clayton pour les tests basés sur  $S_n^{.05}$ ,  $S_n^{.1}$ ,  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^{.5}$  et  $S_n^1$  avec  $M = 1\,000$  échantillons multiplicateurs.

$n$	$\tau$	$S_n^{.05}$	$S_n^{.1}$	$S_n^{.25}$	$S_n^{.5}$	$S_n^1$
50	1/4	38.9	28.7	18.9	13.6	10.9
	1/2	49.7	37.6	19.6	15.2	14.0
	3/4	29.6	23.9	12.5	10.0	9.5
100	1/4	50.1	35.7	18.1	13.9	10.7
	1/2	67.9	53.1	28.7	13.7	13.1
	3/4	46.0	33.3	17.7	11.7	9.4
200	1/4	70.6	53.3	23.1	16.4	12.2
	1/2	92.0	84.9	41.4	21.5	13.5
	3/4	71.2	61.0	24.8	14.1	11.5

Tableau 6.3: Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle de Frank pour les tests basés sur  $S_n^{.05}$ ,  $S_n^1$ ,  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^5$  et  $S_n^1$  avec  $M = 1\,000$  échantillons multiplicateurs.

$n$	$\tau$	$S_n^{.05}$	$S_n^1$	$S_n^{.25}$	$S_n^5$	$S_n^1$
50	1/4	20.3	16.0	10.7	9.7	10.7
	1/2	18.8	13.0	10.0	8.9	8.9
	3/4	13.4	9.2	6.4	5.1	7.2
100	1/4	20.0	12.8	10.3	8.8	7.5
	1/2	23.7	14.9	11.6	5.6	7.1
	3/4	12.2	8.6	7.1	5.6	5.4
200	1/4	21.4	17.2	9.8	7.7	7.1
	1/2	25.4	17.3	8.9	7.9	6.9
	3/4	17.4	12.0	8.6	7.1	7.0

Tableau 6.4: Estimation, basée sur 1 000 répétitions, de la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle d'une copule extrême sous le modèle Normal pour les tests basés sur  $S_n^{.05}$ ,  $S_n^{.1}$ ,  $S_n^{.25}$ ,  $S_n^{.5}$  et  $S_n^1$  avec  $M = 1\,000$  échantillons multiplicateurs.

$n$	$\tau$	$S_n^{.05}$	$S_n^{.1}$	$S_n^{.25}$	$S_n^{.5}$	$S_n^1$
50	1/4	18.5	15.7	9.5	9.4	8.8
	1/2	17.7	11.7	7.7	7.7	8.5
	3/4	8.5	7.5	7.3	6.4	8.6
100	1/4	20.7	11.4	10.1	9.2	8.3
	1/2	17.0	13.7	8.2	7.6	7.1
	3/4	9.9	5.9	7.3	6.2	6.3
200	1/4	25.9	15.7	9.0	8.4	9.1
	1/2	19.8	14.5	8.5	6.8	7.9
	3/4	11.8	7.4	8.1	6.2	5.7

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

Dans ce mémoire, de nouveaux tests pour détecter de la dépendance extrême ont été développés. L'idée maîtresse a consisté à travailler avec la fonction caractéristique associée à la transformation intégrale de probabilité d'une copule. Dans le cas des copules à valeurs extrêmes, cette fonction possède la propriété particulière, et utile, d'être de la même forme peu importe le type de copule extrême. Une estimation non-paramétrique de cette fonction caractéristique fondée sur les rangs des observations a été proposée. Des statistiques de test basées sur la comparaison de cette version empirique avec la version attendue sous l'hypothèse nulle ont ainsi pu être proposées.

Le calcul des valeurs critiques, ou de façon équivalente des valeurs critiques, a été abordé via la méthode de ré-échantillonnage du multiplicateur. Grâce à une adaptation judicieuse de cette technique de type *bootstrap*, on a développé une façon valide de recréer le comportement des statistiques de test sous l'hypothèse nulle. Les simulations effectuées tendent à démontrer que la méthode est aussi valide pour des tailles d'échantillons relativement petites.

L'idée de traiter les problèmes d'inférence dans les modèles de copules en utilisant une fonction caractéristique semble porteuse. À notre connaissance, personne n'avait eu l'idée d'utiliser ces fonctions avec les copules. Pourtant, la théorie est bien développée dans le cas à une variable et les procédures statistiques qui en découlent ont généralement de belles propriétés.

Il serait intéressant de démontrer rigoureusement la validité de nos tests. D'abord, il faudrait démontrer que le processus  $\Psi_n$  converge dans un espace de fonctions complexes. Pour ce faire, il faudrait faire appel aux outils de la théorie des processus empiriques telle que développée dans les ouvrages de van der Vaart & Wellner (1996) et de Kosorok (2008). Il faudrait également établir formellement la validité de la méthode de ré-échantillonnage qui nous a permis d'obtenir les valeurs critiques. Finalement, il serait intéressant d'étudier une version *fonction caractéristique* de la populaire copule empirique, qui est utilisée à outrance dans l'inférence de copules.

# Références

- ALBA FERNÁNDEZ, V., JIMÉNEZ GAMERO, M. D. & MUÑOZ GARCÍA, J. (2008). A test for the two-sample problem based on empirical characteristic functions. *Comput. Statist. Data Anal.* **52**, 3730–3748.
- BARBE, P., GENEST, C., GHOUDI, K. & RÉMILLARD, B. (1996). On Kendall's process. *J. Multivariate Anal.* **58**, 197–229.
- BEN GHORBAL, N., GENEST, C. & NEŠLEHOVÁ, J. (2009). On the Ghoudi, Khoudraji, and Rivest test for extreme-value dependence. *Canad. J. Statist.* **37**, 534–552.
- EPPS, T. W. & PULLEY, L. B. (1983). A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika* **70**, 723–726.
- FAN, Y. (1997). Goodness-of-fit tests for a multivariate distribution by the empirical characteristic function. *J. Multivariate Anal.* **62**, 36–63.
- FARLIE, D. J. G. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika* **47**, 307–323.



- FARLIE, D. J. G. (1961). The asymptotic efficiency of Daniels's generalized correlation coefficients. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **23**, 128–142.
- FEUERVERGER, A. & MUREIKA, R. A. (1977). The empirical characteristic function and its applications. *Ann. Statist.* **5**, 88–97.
- GENEST, C., GHOUDI, K. & RIVEST, L.-P. (1998). “Understanding relationships using copulas,” by Edward Frees and Emiliano Valdez, January 1998. *N. Am. Actuar. J.* **2**, 143–149.
- GENEST, C., QUESSY, J.-F. & RÉMILLARD, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scand. J. Statist.* **33**, 337–366.
- GENEST, C. & RIVEST, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *J. Amer. Statist. Assoc.* **88**, 1034–1043.
- GHOUDI, K., KHOUDRAJI, A. & RIVEST, L.-P. (1998). Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles. *Canad. J. Statist.* **26**, 187–197.
- GUDENDORF, G. & SEGERS, J. (2010). Extreme-value copulas. *Copula Theory and Its Applications*, 127–145.
- JIMÉNEZ-GAMERO, M. D., ALBA-FERNÁNDEZ, V., MUÑOZ-GARCÍA, J. & CHALCO-CANO, Y. (2009). Goodness-of-fit tests based on empirical characteristic functions. *Comput. Statist. Data Anal.* **53**, 3957–3971.
- KOJADINOVIC, I. & YAN, J. (2010). Nonparametric rank-based tests of

- bivariate extreme-value dependence. *Journal of Multivariate Analysis* **101**, 2234–2249.
- KOSOROK, M. (2008). *Introduction to empirical processes and semiparametric inference*. Springer Verlag.
- LEE, A. J. (1990). *U-statistics*, vol. 110 of *Statistics: Textbooks and Monographs*. New York: Marcel Dekker Inc. Theory and practice.
- MATSUI, M. & TAKEMURA, A. (2005). Empirical characteristic function approach to goodness-of-fit tests for the Cauchy distribution with parameters estimated by MLE or EISE. *Ann. Inst. Statist. Math.* **57**, 183–199.
- PICKANDS, III, J. (1981). Multivariate extreme value distributions. In *Proceedings of the 43rd session of the International Statistical Institute, Vol. 2 (Buenos Aires, 1981)*, vol. 49. With a discussion.
- QUESSY, J.-F. (2012). Testing for bivariate extreme dependence using Kendall’s process. *Scandinavian Journal of Statistics* **39**, 497–514.
- QUESSY, J.-F. & ÉTHIER, F. (2012). Cramér–von mises and characteristic function tests for the two and  $k$ -sample problems with dependent data. *Computational Statistics and Data Analysis* **56**, 2097–2111.
- QUESSY, J.-F., SAÏD, M. & FAVRE, A.-C. (2012). Multivariate Kendall’s tau for change-point detection in copulas. *Revue Canadienne de Statistique* **40**, sous presse.
- ROYDEN, H. L. (1988). *Real analysis*. New York: Macmillan Publishing Company, 3rd ed.

- SHAO, J. (2003). *Mathematical statistics*. Springer Texts in Statistics. New York: Springer-Verlag, 2nd ed.
- SKLAR, M. (1959). Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229–231.
- TOWHIDI, M. & SALMANPOUR, M. (2007). A new goodness-of-fit test based on the empirical characteristic function. *Comm. Statist. Theory Methods* **36**, 2777–2785.
- VAN DER VAART, A. W. & WELLNER, J. A. (1996). *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag. With applications to statistics.

# ANNEXE A

## PROGRAMMES EN MATLAB

### A.1 Programmes utilitaires

#### A.1.1 Transformation d'un vecteur de données en rangs

```
1 function R = rankit(X)
2
3 R = tiedrank(X);
```

### A.1.2 Simulation de paires selon un modèle de copule choisi

```

1  function X = sim_copula(n,model,tau)
2
3  % Generates a bivariate sample of size n from the following copulas :
4  % 1. Clayton
5  % 3. Ali-Mikhail-Haq
6  % 4. Gumbel-Hougaard (extreme)
7  % 5. Frank
8  % 7. Farlie-Gumbel-Morgenstern
9  % 8. Plackett
10 % 9. Gumbel A (extreme)
11 % 10. Marshall-Olkin (extreme)
12 % 11. Normal
13 % 12. Student
14 % 13. Fréchet
15 % 15. Galambos (extreme)
16 % 16. Cuadras-Augé (extreme)
17 % 17. Ordinal sum
18 % 18. Durante A
19 % 19. Durante B
20 % 21-40. Student with "model-20" degrees of freedom
21 %
22 % author : Jean-François Quessy, Ph. D.
23
24 X = zeros(n,2);
25
26 theta = tau_theta(model,tau);
27
28 % Clayton
29 if (model == 1)
30     if (theta == 0)
31         X = rand(n,2);
32     else
33         for i=1:n
34             v = rand;
35             t = rand;
36             a = v^(-theta);
37             b = t^(-theta/(theta+1)) - 1;
38             X(i,1) = (a*b+1)^(-1/theta);
39             X(i,2) = v;
40         end
41     end
42
43 % Ali-Mikhail-Haq
44 elseif (model == 3)
45     if (theta == 0)
46         X = rand(n,2);
47     else
48         for i=1:n

```

```

49         u = rand; t = rand;
50         a = -theta - 4*t*theta^2*u + 2*theta*t*u - 2*theta*t
51             + 2*theta^2*t + 2*theta^2*t*u^2 + 1;
52             b = 1 - 2*theta + 4*t*theta^2*u^2 + 4*theta*t*u
53             - 4*theta^2*t*u + theta^2;
54             c = -2*theta^2*t*u + theta^2*u^2*t - theta + theta^2*t;
55         X(i,1) = u;
56         X(i,2) = (a-sqrt(b))/(2*c);
57     end
58 end
59
60 %Gumbel-Hougaard
61 elseif (model == 4)
62     if (theta == 0)
63         X = rand(n,2);
64     else
65         for i=1:n
66             U0 = rand; U1 = rand; U2 = rand;
67             z = (U0^(1-theta))/(U0^(1-theta)+(1.0-U0)^(1-theta));
68             if (rand < 1-theta)
69                 w = U1*U2;
70             else
71                 w = U2;
72             end
73             t1 = ((1-z)^(1/(1-theta)) + z^(1/(1-theta)))^(1-theta);
74             X(i,1) = w^(z/t1);
75             X(i,2) = w^((1.0-z)/t1);
76         end
77     end
78
79 %Frank
80 elseif (model == 5)
81     if (theta == 0)
82         X = rand(n,2);
83     else
84         for i=1:n
85             u = rand; t = rand;
86             t1 = t*exp(-theta) + (1-t)*exp(-theta*u);
87             t2 = t + (1-t)*exp(-theta*u);
88             X(i,1) = u;
89             X(i,2) = log(t2/t1)/theta;
90         end
91     end
92
93 %Farlie-Gumbel-Morgenstern
94 elseif (model == 7)
95     if (theta == 0)
96         X = rand(n,2);
97     else
98         for i=1:n
99             u = rand; t = rand;
100             b = theta*(1-2*u);

```

```

101         root = sqrt((1+b)^2 - 4*t*b);
102         X(i,1) = u;
103         X(i,2) = 2*t/(1+b+root);
104     end
105 end
106
107 %Plackett
108 elseif (model == 8)
109     if (theta == 0)
110         X = rand(n,2);
111     else
112         for i=1:n
113             u = rand; t = rand;
114             a = t*(1-t);
115             b = theta + a*(theta-1)^2;
116             c = 2*a*(u*theta^2 + 1 - u) + theta*(1-2*a);
117             d = sqrt(theta)*sqrt(theta + 4*a*u*(1-u)*(1-theta)^2);
118             X(i,1) = u;
119             X(i,2) = (c-(1-2*t)*d)/(2*b);
120         end
121     end
122
123 %Gumbel A
124 elseif (model == 9)
125     c = (4+theta)/(4-theta);
126     for i=1:n
127         U1 = unifrnd(0,1); U2 = unifrnd(0,1); U3 = unifrnd(0,1);
128         %rejection method
129         Z = 0; Z1 = 1; %arbitrarily
130         while (Z ~= Z1)
131             Z1 = unifrnd(0,1); U0 = unifrnd(0,1);
132             t1 = ( 2 - theta*(2*Z1^2 - 2*Z1 + 1) )
133                 / ( (theta*Z1^2 - theta*Z1 + 1)^2 ) - 1;
134             if (U0<=t1/c)
135                 Z = Z1;
136             end
137         end
138
139         t2 = 2*theta*Z*(1-Z)*(theta*Z^2 - theta*Z + 1);
140         t3 = 2 - 2*theta*Z^2 + 2*theta*Z - theta
141             - (theta*Z^2 - theta*Z + 1)^2;
142         t4 = t2/t3;
143         if (U3<=t4)
144             W = U1;
145         else
146             W = U1*U2;
147         end
148         t5 = theta*Z^2 - theta*Z + 1;
149         X(i,1) = W^(Z/t5);
150         X(i,2) = W^((1-Z)/t5);
151     end
152

```

```

153 % Marshall-Olkin (equal parameters)
154 elseif (model == 10)
155     if (theta == 0)
156         X = rand(n,2);
157     else
158         for i=1:n
159             U = unifrnd(0,1,1,3);
160             X(i,1) = max(U(1,1)^(1/(1-theta)),U(1,3)^(1/theta));
161             X(i,2) = max(U(1,2)^(1/(1-theta)),U(1,3)^(1/theta));
162         end
163     end
164
165 % Normal
166 elseif (model == 11)
167     mu = [0 0]; sigma = [1 theta ; theta 1];
168     for i=1:n
169         X(i,:) = mvnrnd(mu,sigma);
170     end
171     X = normcdf(X);
172
173 % Fréchet
174 elseif (model == 13)
175     if (theta == 0.0)
176         X = rand(n,2);
177     else
178         for i=1:n
179             t = rand; s = rand; X(i,2) = s;
180             if (t <= theta)
181                 X(i,1) = s;
182             else
183                 X(i,1) = rand;
184             end
185         end
186     end
187
188 % Galambos
189 elseif (model == 15)
190     if (theta == 0.0)
191         X = rand(n,2);
192     else
193         for i=1:n
194             V = rand; S = rand;
195
196             % CA(x,V) * A(r) - r*A'(r) / V
197             f = @(x)( x*exp( ((-log(abs(x)))^(-theta)
198                             +(-log(V))^(-theta))^(-1/theta) )
199                 *(1 - (-log(abs(x)))^(theta+1))*((-log(abs(x)))^theta
200                 + (-log(V))^theta)^(-(theta+1)/theta)) - S );
201
202             %if (tauj=.5)
203                 U = fzero(f, .5);
204             %else

```



```

205         % U = fzero(f,V);
206         %end
207
208         X(i,1) = U; X(i,2) = V;
209     end
210 end
211
212 % Cuadras-Augé
213 elseif (model == 16)
214     if (theta == 0)
215         X = rand(n,2);
216     else
217         for i=1:n
218             t = rand; v = rand; X(i,2) = v;
219             if ( t < (1-theta)*v^(1-theta) )
220                 X(i,1) = t*v^theta/(1-theta);
221             elseif ( t < v^(1-theta) )
222                 X(i,1) = v;
223             else
224                 X(i,1) = t^(1/(1-theta));
225             end
226         end
227     end
228
229 % Ordinal sum
230 elseif (model == 17)
231     for i=1:n
232         t = rand; v = rand; X(i,2) = v;
233         if ( v <= 1/theta )
234             X(i,1) = t/theta;
235         else
236             X(i,1) = v;
237         end
238     end
239
240 % Durante A
241 elseif (model == 18)
242     if (theta == 1.0)
243         X = rand(n,2);
244     else
245         for i=1:n
246             t = rand; v = rand; X(i,2) = v;
247             if ( t < theta*v*(1-v)^(theta-1) )
248                 X(i,1) = t/(theta*(1.0-v)^(theta-1.0));
249             elseif ( t < 1.0 - (1.0-v)^theta )
250                 X(i,1) = v;
251             else
252                 X(i,1) = 1.0 - (1.0-t)^(1.0/theta);
253             end
254         end
255     end
256

```

```

257 %Durante B
258 elseif (model == 19)
259     if (theta == 0.0)
260         X = rand(n,2);
261     else
262         for i=1:n
263             t = rand; v = rand; X(i,2) = v;
264             if ( t < (theta+1)*v/(theta*v+1)^2 )
265                 X(i,1) = (theta*v+1)^2*t/(theta+1);
266             elseif ( t < (theta+1)*v/(theta*v+1) )
267                 X(i,1) = v;
268             else
269                 X(i,1) = t/(1+theta-theta*t);
270             end
271         end
272     end
273
274 %Student
275 elseif (model <= 40 && model>= 21)
276     sigma = [1 theta ; theta 1];
277     for i=1:n
278         X(i,:) = mvtrnd(sigma,model-20);
279     end
280     X = tcdf(X,model-20);
281 end

```

### A.1.3 Calcul du tau de Kendall empirique

```
1 function t = tau(X)
2
3 a = size(X); n = a(1); d = a(2);
4
5 c = 0;
6 for i=1:n
7     for j=1:n
8         mark = 0;
9         for k=1:d
10            if ( X(i,k) < X(j,k) )
11                mark = mark + 1;
12            end
13            if ( mark==d )
14                c = c+1;
15            end
16        end
17    end
18 end
19
20 b = c/(n*(n-1));
21 t = (2^d*b-1)/(2^(d-1)-1);
```

## A.2 Tests d'extrêmes bivariées

### A.2.1 Statistique de test et valeur critique

```

1  function [Sn,pv,testSn ,Shat] = Test_Ouimet(X,M,kappa ,N)
2
3  n = length(X);
4
5  %Calculs de Rjk
6  R = zeros(n,n);
7  for j=1:n
8      for k=1:n
9          if ( (X(j,1) <= X(k,1)) && (X(j,2) <= X(k,2)) )
10             R(j,k) = 1;
11         end
12     end
13 end
14
15 %Calcul des pseudo-observations W1,...,Wn
16 I = ones(1,n);
17 W = (I*R).'/n;
18
19 %Calcul de W1tilde, ..., Wntilde
20 kendall = max(tau(X),0);
21 W_tilde = sim_K_extreme(N,kendall);
22
23 %Calcul de la statistique de test
24 temp1 = zeros(n,n); temp2 = zeros(n,N); temp3 = zeros(N,N);
25 for j=1:n
26     for k=1:n
27         temp1(j,k) = exp(-(W(j)-W(k))^2/(4*kappa));
28     end
29 end
30 T1 = sum(sum(temp1));
31
32 for j=1:n
33     for k=1:N
34         temp2(j,k) = exp(-(W(j)-W_tilde(k))^2/(4*kappa));
35     end
36 end
37
38 T2 = sum(sum(temp2));
39 for j=1:N
40     for k=1:N
41         temp3(j,k) = exp(-(W_tilde(j)-W_tilde(k))^2/(4*kappa));
42     end
43 end
44 T3 = sum(sum(temp3));
45
46 Sn = (T1/n) - (2*T2/N) + (n*T3/N^2);
47

```

```

48 %Calcul des intégrales de beta1(x-w) et de beta2(x-w) p/r à 1+ln(w)
49 T = 100;
50 IW = zeros(1,T); f1 = zeros(1,n);
51 for j=1:n
52     x = j/n;
53     for q=1:T
54         w = (q-.5) / T;
55         IW(q) = exp(-(x-w)^2/(4*kappa))*(1+log(w));
56     end
57     f1(j) = sum(IW) / T;
58 end
59 IW = zeros(1,T); f2 = zeros(1,n);
60 for j=1:n
61     x = j/n;
62     for q=1:T
63         w = (q-.5) / T;
64         IW(q) = (x-w)*exp(-(x-w)^2/(4*kappa))*(1+log(w)) / (2*kappa);
65     end
66     f2(j) = sum(IW) / T;
67 end
68
69 %Calcul de l'intégrale de beta1(x-y) p/r à (1+ln(x))*(1+ln(y))
70 epsilon = 0.0001;
71 I_tilde = dblquad(@(x,y)exp(-(x-y).^2/(4*kappa))
72     .*(1+log(x)).*(1+log(y)),epsilon,1,epsilon,1);
73
74 %Calcul de la matrice V
75 V = zeros(n,n);
76 for j=1:n
77     for k=j:n
78         %Calcul de chacune des parties de V
79         T1 = exp(-(W(j)-W(k))^2/(4*kappa));
80
81         T2=0; T3=0; T4=0; T5=0; T6=0; T7=0; T8=0; T9=0;
82         for l=1:n
83             T2 = T2 + R(k,l)*(W(j)-W(l))
84                 *exp(-(W(j)-W(l))^2/(4*kappa))/(2*kappa);
85             T3 = T3 + R(j,l)*(W(k)-W(l))
86                 *exp(-(W(k)-W(l))^2/(4*kappa))/(2*kappa);
87             T4 = T4 + (R(k,l) + R(l,k)) * f1( int16(n*W(j)) );
88             T5 = T5 + (R(j,l) + R(l,j)) * f1( int16(n*W(k)) );
89             for lp=1:n
90                 T6 = T6 + R(j,l) * R(k,lp) * (2*kappa-(W(l)-W(lp))^2)
91                     * exp(-(W(l)-W(lp))^2/(4*kappa)) / (4*kappa^2);
92                 T7 = T7 + (R(k,lp) + R(lp,k)) * R(j,l) * f2( int16(n*W(l)) );
93                 T8 = T8 + (R(j,l) + R(l,j)) * R(k,lp) * f2( int16(n*W(lp)) );
94                 T9 = T9 + (R(j,l) + R(l,j)) * (R(k,lp) + R(lp,k));
95             end
96         end
97         V(j,k) = T1 + (T2+T3)/n - 4*(T4+T5)/n + T6/n^2
98             + 4*(T7+T8)/n^2 + 16*I_tilde*T9/n^2;
99         V(k,j) = V(j,k);

```

```
100     end
101 end
102
103 % Versions multiplicateurs de la statistique Sn
104 Shat = zeros(M,1);
105 parfor i=1:M
106     g = exprnd(1,n,1);
107     xi = g / mean(g) - 1;
108     Shat(i) = xi.' * V * xi;
109 end
110 Shat = Shat / n;
111
112 % Calcul de la p-valeur
113 pv = sum(Shat > Sn) / M;
114
115 testSn = 0;
116 if pv < .05
117     testSn = 1;
118 end
```

### A.2.2 Évaluation de la puissance du nouveau test

```
1 function POWER = Power_Ouimet(n,model,tau,M,IT,kappa,N)
2
3 testSn = zeros(IT,1);
4
5 parfor i=1:IT
6     X = sim_copula(n,model,tau);
7     [~,~,testSn(i),~] = Test_Ouimet(X,M,kappa,N);
8 end
9 POWER = sum(testSn) / IT;
```

### A.2.3 Création d'un tableau avec les résultats de puissance

```
1 function Power = Tableau_Ouimet(n, model, kendall, kappa, M, IT, N)
2
3 a = length(kendall);
4 b = length(model);
5
6 Power = zeros(a,b);
7
8 for p=1:a
9     for q=1:b
10         Power(p,q) = Power_Ouimet(n,model(q),kendall(p),M,IT,kappa,N);
11     end
12 end
```



#### A.2.4 Évaluation de la fonction $K_\tau$ au point $w$

```
1 function K = K_extreme(kendall , t)
2
3 if (t==0)
4     K = 0;
5 else
6     K = t - (1-kendall)*t*log(t);
7 end
```

### A.2.5 Simulation de données de la loi $K_\tau$

```
1 function W = sim_K_extreme(n,kendall)
2
3 % Génération de n variables aléatoires de loi
4 %  $K(w) = w - (1-kendall)*w*\log(w)$  par la
5 % méthode du rejet
6
7 W = zeros(n,1);
8
9 for i=1:n
10     U=1; temp=0;
11     while (U > temp)
12         % Génération d'une v.a. de densité  $g(w) = 1 / 2*\sqrt{w}$ 
13         Y = rand()^2;
14         temp = sqrt(Y)*(kendall - (1-kendall)*log(Y));
15         U = rand();
16     end
17     W(i) = Y;
18 end
```